

# EL HAJJAJI MATHS

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

LES METHODES PAS A PAS

CORRIGES DETAILLES ET EXPLIQUES



2<sup>EME</sup> ANNEE BACCALAUREAT  
SCIENCES EXPERIMENTALES (PC. SVT. ...)

TOME 1

LA CONTINUITE

Si  $a > 0$  et  $b > 0$

Alors

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$$\ln a^r = r \ln a; r \in \mathbb{Q}$$

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

$$\ln e = 1$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); \ln e^x = x$$

الأستاذ: البشير الحجاجي



استاذ التعليم الثانوي التأهيلي  
بشكائوية المسيرة الخضراء التأهيلية  
المديرية الإقليمية تيزنيت.

شُكْرٌ خَاصٌّ

الشُّكْرُ المَوْضُوعُ لِكُلِّ مَنْ:

الأستاذ: إبراهيم الحجاجي، أخي الأكبر  
وصاحب الفضل الكبير

السيد: إبراهيم إضرصار، المدير الاقليمي  
بالمديرية الإقليمية تيزنيت، على دعمه  
المتواصل

السيد: حسن بوليد، مفتش مادة الرياضيات  
بالمديرية الإقليمية تيزنيت

فَسَلِّمُوا الدُّعَاءَ



## مقدمة

الحمد لله ، والصلاة والسلام على مولانا رسول الله .  
تزامناً مع بداية الدخول المدرسي 2020-2021 ، والذي  
يُسمّى بِظُرُوفٍ خَاصَّةٍ ، أُهْدِي لِتِلَامِيذِ السَّنةِ  
الثَّانِيَةِ بَكالورياً عُلُومَ تَجْرِييَّةَةٍ ، بِجَمِيعِ مَسَالِكِهَا  
هَذَا الْعَمَلُ الْمَتَوَاضِعُ الَّذِي يَحْتَوِي عَلَى تَمَارِينِ  
مَحَلُولَةٍ ، وَكَذَا تَمَارِينِ لِلْبَحْثِ . رَاجِيّاً مِنْ  
الْعَلِيِّ الْقَدِيرِ أَنْ لَا تُنْسَوْنَا مِنْ خَالِصِ دُعَائِكُمْ

بِحَظِّ الْبَشِيرِ الْحَجَّاجِي  
اسْتَاذ مَادَّةِ الرِّيَاضِيَّاتِ  
الثَّانَوِيَّةِ التَّأْهِيلِيَّةِ الْمَسِيرَةِ الْخَضِرَاءِ  
الْمَدِيرِيَّةِ الْإِقْلِيمِيَّةِ تِينِيَّةِ

نَسْأَلُكُمْ الدُّعَاءَ

## EXERCICE 1

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} ; x \neq 1 \\ f(1) = -2 \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est continue en  $x_0 = 1$

## CORRECTION

Il suffit de vérifier que :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-3) \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\text{Or } f(1) = -2$$

$$\text{Et puisque : } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

Alors  $f$  est continue en  $x_0 = 1$

$f$  est continue en  $x_0$   
si et seulement si  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Ici, si on remplace  $x$  par 1, on trouve la forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ ". Dans ce cas, il faut factoriser le numérateur et le dénominateur par  $(x-1)$ , puis réduire par  $(x-1)$

## EXERCICE 2

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 4x - 4} ; x \neq -2 \\ f(-2) = \frac{5}{8} \end{cases}$$

1. Déterminer  $\mathcal{D}_f$ , le domaine de définition de  $f$ .

2. Montrer que  $f$  est continue en  $x_0 = -2$

## CORRECTION

① ~ Déterminons  $\mathcal{D}_f$

$$x \in \mathcal{D}_f \iff (3x^2 + 4x - 4 \neq 0 \text{ et } x \neq -2) \text{ ou } x = -2$$

Soit le trinôme :  $3x^2 + 4x - 4$

Son discriminant :  $\Delta = b^2 - 4ac = 64$

On a :  $\Delta > 0$

Donc le trinôme  $3x^2 + 4x - 4$

admet deux racines  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x_1 = \frac{2}{3} \text{ et } x_2 = -2$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 4x - 4} ; x \neq -2 \\ f(-2) = \frac{5}{8} \end{cases}$$

$3x^2 + 4x - 4 \neq 0 \text{ et } x \neq -2$   
ou  $x = -2$



Donc, on aura:

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_f &\Leftrightarrow \left( x \neq \frac{2}{3} \text{ et } x \neq -2 \text{ et } x \neq -2 \right) \text{ ou } x = -2 \\ &\Leftrightarrow \left( x \neq \frac{2}{3} \text{ et } x \neq -2 \right) \text{ ou } x = -2 \\ &\Leftrightarrow x \neq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\} = ]-\infty; \frac{2}{3}[ \cup ]\frac{2}{3}; +\infty[$$

2) Montrons que  $f$  est continue en  $x_0 = -2$

Il suffit de vérifier que :  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 4x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x-1)}{(x+2)(3x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-1}{3x-2} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Or } f(-2) = \frac{5}{8}$$

$$\text{Et puisque } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$$

Alors  $f$  est continue en  $x_0 = -2$

$f$  est continue en  $x_0$   
si et seulement si  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Ici, si on remplace  $x$  par  $-2$   
on trouve la forme indéterminée  
" $\frac{0}{0}$ ". Dans ce cas, il faut  
factoriser le numérateur  
et le dénominateur par  
 $(x+2)$ , puis réduire par  $(x+2)$

Si  $x_0 \neq 0$  est une racine de  
 $ax^2 + bx + c$ , alors  
 $ax^2 + bx + c = (x - x_0) \left( ax - \frac{c}{x_0} \right)$

### EXERCICE 3

Soit  $f$  la fonction définie par :  
Montrer que  $f$  est continue en  $x_0 = 1$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^3 - 5x^2 - x + 3}{2x^3 - 5x + 3}; x_0 \neq 1 \\ f(1) = -2 \end{cases}$$

### CORRECTION

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 5x^2 - x + 3}{2x^3 - 5x + 3}$$

Factorisons  $3x^3 - 5x^2 - x + 3$  par  $(x-1)$

Autrement dit ; cherchons

le polynôme  $Q(x)$  de degré 2 tel que

$$3x^3 - 5x^2 - x + 3 = (x-1)Q(x)$$

Remarque

Vous pouvez voir cette  
méthode sur youtube

il faut factoriser le  
numérateur et le dénomi-  
nateur par  $(x-1)$ , puis réduire  
par  $(x-1)$

Pour factoriser les  
polynômes de degré  
supérieur ou égal à 3,  
je préfère le tableau  
d'Höner

Les coefficients de $3x^3 - 5x^2 - x + 3$	3	-5	-1	3
La racine $\boxed{1} \rightarrow x$				
Les coefficients de $Q(x)$	3	-2	-3	0

$$3x^3 - 5x^2 - x + 3 = (x-1)(3x^2 - 2x - 3)$$

De la même manière, on va factoriser:  $2x^3 - 5x + 3$  par  $(x-1)$   
 (Remarquons que:  $2x^3 - 5x + 3 = 2x^3 + 0x^2 - 5x + 3$ )

Les coefficients de $2x^3 + 0x^2 - 5x + 3$	2	0	-5	3
La racine $\boxed{1} \rightarrow x$				
Les coefficients de $Q(x)$	2	2	-3	0

$$\text{Donc: } 2x^3 - 5x + 3 = (x-1)(2x^2 + 2x - 3)$$

$$\begin{aligned} \text{On aura donc: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x^2 - 2x - 3)}{(x-1)(2x^2 + 2x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 3}{2x^2 + 2x - 3} \\ &= -2 \end{aligned}$$

$f$  est continue en  $x_0$   
 si et seulement si  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\text{Et puisque: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

Alors  $f$  est continue en  $x_0 = 1$

#### EXERCICE 4

Soit  $f$  la fonction définie par:

1. Déterminer  $D_f$ , le domaine de définition de  $f$
2. Montrer que  $f$  est continue en  $x_0 = 2$
3. Étudier la continuité de  $f$  sur  $D_f$ .

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2}; x < 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x+2} - 2}; x > 2 \\ f(2) = \frac{8}{3} \end{cases}$$

#### CORRECTION



# 1 ~ Déterminons $\mathcal{D}_f$

Notons:  $\begin{cases} f_1(x) = f(x); x < 2 \\ f_2(x) = f(x); x > 2 \end{cases}$

On aura donc:  $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f_1} \cup \mathcal{D}_{f_2} \cup \{2\}$

Donc, il faut déterminer  $\mathcal{D}_{f_1}$  et  $\mathcal{D}_{f_2}$

$x \in \mathcal{D}_{f_1} \iff x^2 - x - 2 \neq 0 \text{ et } x < 2$

On considère le trinôme:  $x^2 - x - 2$

Son discriminant:  $\Delta = b^2 - 4ac = 9$

Donc le trinôme:  $x^2 - x - 2$  possède deux racines distinctes:

$x_1 = 2$  et  $x_2 = -1$

Donc, on aura:

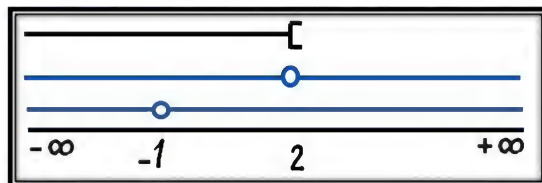
$x \in \mathcal{D}_{f_1} \iff x \neq -1 \text{ et } x \neq 2 \text{ et } x < 2$

$\iff x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 2[ \cup ]2; +\infty[ \cap ]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[ \cap ]-\infty; 2[$

$\iff x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 2[$

$\iff x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 2[$

Donc:  $\mathcal{D}_{f_1} = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 2[$



$x \in \mathcal{D}_{f_2} \iff x^2 + 5 \geq 0 \text{ et } x + 2 \geq 0 \text{ et } \sqrt{x+2} - 2 \neq 0 \text{ et } x > 2$

$\iff x^2 \geq -5 \text{ et } x \geq -2 \text{ et } \sqrt{x+2} \neq 2 \text{ et } x > 2$

$\iff x \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq -2 \text{ et } x + 2 \neq 4 \text{ et } x > 2$

$\iff x \geq -2 \text{ et } x \neq 2 \text{ et } x > 2$

$\iff x > 2$

Donc:  $\mathcal{D}_{f_2} = ]2; +\infty[$

$x^2 \geq -5$  est toujours vraie.

$f_2(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2}; x > 2$

$x^2+5 \geq 0; x+2 \geq 0; \sqrt{x+2}-2 \neq 0; x > 2$

Et:  $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f_1} \cup \mathcal{D}_{f_2} \cup \{2\}$

$= ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 2[ \cup ]2; +\infty[ \cup \{2\}$

D'où:  $\mathcal{D}_f = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$

## 2 ~ La continuité de $f$ en $x_0 = 2$

La continuité de  $f$  en  $x_0 = 2$  à gauche

Ici,  $f$  est définie par deux formules et l'image de 2.

2 est donc forcément appartient à  $\mathcal{D}_f$

$f_1(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2}; x < 2$

$x^2 - x - 2 \neq 0 \text{ et } x < 2$

Si  $x \neq 2$  et  $x < 2$


Alors  $x < 2$

Vérifions si:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = f(2)$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(3x+2)}{(x-2)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x+2}{x+1} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

On a bien:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = f(2)$


Donc  $f$  est continue en  $x_0 = 2$  à gauche

 La continuité de  $f$  en  $x_0 = 2$  à droite

Vérifions si:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = f(2)$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{\sqrt{x+2} - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\sqrt{x^2+5} - 3)(\sqrt{x^2+5} + 3)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)(\sqrt{x^2+5} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\sqrt{x^2+5}^2 - 3^2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2}^2 - 2^2)(\sqrt{x^2+5} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+5-9}{x+2-4} \times \frac{(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x^2+5} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} \times \frac{(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x^2+5} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \times \frac{(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x^2+5} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+2) \times \frac{(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x^2+5} + 3)} \\ &= 4 \times \frac{4}{6} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$f$  est continue en  $x_0$  à gauche  
si et seulement si:  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$

Ici, si on remplace  $x$  par 2 on trouve la forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ ". Dans ce cas, il faut factoriser le numérateur et le dénominateur par  $(x-2)$ , puis réduire par  $(x-2)$  

$f$  est continue en  $x_0$  à droite  
si et seulement si:  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$

Dans ce cas, il faut penser à multiplier le numérateur par son conjugué  $(\sqrt{x^2+5} + 3)$  et de multiplier le dénominateur par son conjugué  $(\sqrt{x+2} + 2)$  (Pour tuer la racine), puis on factorise par  $(x-2)$



### Conclusion

On a :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = f(2)$

Donc :  $f$  est continue en  $x_0 = 2$

3. La continuité de  $f$  sur  $D_f$

 La continuité de  $f$  sur  $D_{f_1}$

Ici, il suffit d'appliquer les propriétés de la continuité d'une fonction sur un intervalle

On a :  $f : x \mapsto \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2}$  est continue sur les deux intervalles

$]-\infty; -1[$  et  $]-1; 2[$  Comme étant la restriction d'une fraction rationnelle

 La continuité de  $f$  sur l'intervalle  $]2; +\infty[$

On a :  $x \mapsto x^2 + 5$  est continue sur  $]2; +\infty[$  Comme étant polynôme

Et :  $\forall x \in ]2; +\infty[; x^2 + 5 \geq 0$

Donc :  $x \mapsto \sqrt{x^2 + 5}$  est continue sur  $]2; +\infty[$

Et :  $x \mapsto -3$  continue sur  $]2; +\infty[$

Donc :  $x \mapsto \sqrt{x^2 + 5} - 3$  est continue sur  $]2; +\infty[$

De la même manière, on montre que :  $x \mapsto \sqrt{x+2} - 2$  est continue sur  $]2; +\infty[$

Et puisque :  $\forall x \in ]2; +\infty[; \sqrt{x+2} - 2 \neq 0$

Alors :  $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x+2} - 2}$

est continue sur  $]2; +\infty[$

Si  $u$  est une fonction continue sur l'intervalle  $I$   
Et  $(\forall x \in I); u(x) \geq 0$   
Alors :  $x \mapsto \sqrt{u(x)}$   
est continue sur  $I$

Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions continues sur l'intervalle  $I$   
avec  $(\forall x \in I); v(x) \neq 0$   
Alors la fonction  $x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$   
est continue sur  $I$ .

### Conclusion

On a  $f$  est continue sur  $D_f \setminus \{2\}$

Et puisque  $f$  est continue en  $x_0 = 2$

Alors  $f$  est continue sur  $D_f$

### EXERCICE 5

لَا إِلَهَ إِلَّا أَنْتَ شَهِدْتُ أَنِّي كُنْتُ مِنَ الظَّالِمِينَ

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin^2(x)}-1}{x^2} ; x > 0 \\ f(x) = \frac{\cos(x)-1}{x} + a ; x < 0 \\ f(0) = b \end{cases}$$

1. Déterminer les valeurs de  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit continue en  $x_0 = 0$
2. On suppose que  $a = b = \frac{1}{2}$   
Étudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### CORRECTION

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+\sin^2(x)}-1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{1+\sin^2(x)}-1)(\sqrt{1+\sin^2(x)}+1)}{x^2(\sqrt{1+\sin^2(x)}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+\sin^2(x)}-1^2}{x^2(\sqrt{1+\sin^2(x)}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+\sin^2(x)-1}{x^2(\sqrt{1+\sin^2(x)}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \times \frac{1}{(\sqrt{1+\sin^2(x)}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \times \frac{1}{(\sqrt{1+\sin^2(x)}+1)} \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Si on remplace  $x$  par  $0$ , on trouve la forme " $\frac{0}{0}$ "



$\frac{0}{0}$  et la racine carrée, on pense à multiplier par le conjugué.

Remarquons bien que  $(\sqrt{1+\sin^2(x)}+1)$  ne pose aucun problème (il tend vers 2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(x)-1}{x} + a \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1-\cos(x)}{x \cdot x} \cdot x + a \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot x + a \\ &= -\frac{1}{2} \times 0 + a \\ &= a \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$$

Et on a :  $f(0) = b$



Donc  $f$  est continue en  $x_0=0$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$

D'où :  $a=b=\frac{1}{2}$

② ~ La continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

△ Sur l'intervalle  $]0; +\infty[$

On a :  $x \mapsto 1 + \sin^2(x)$  est continue sur l'intervalle  $]0; +\infty[$

et  $\forall x \in ]0; +\infty[ ; 1 + \sin^2(x) \geq 0$

Donc :  $x \mapsto \sqrt{1 + \sin^2(x)}$  est continue sur l'intervalle  $]0; +\infty[$

Et :  $x \mapsto \sqrt{1 + \sin^2(x)} - 1$  est continue sur l'intervalle  $]0; +\infty[$

Et puisque :  $x \mapsto x^2$  est continue sur l'intervalle  $]0; +\infty[$

Et :  $\forall x \in ]0; +\infty[ ; x^2 \neq 0$

Alors :  $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1 + \sin^2(x)} - 1}{x^2}$  est continue

sur l'intervalle  $]0; +\infty[$

Si  $u$  est une fonction continue sur l'intervalle  $I$   
Et  $(\forall x \in I) ; u(x) \geq 0$   
Alors :  $x \mapsto \sqrt{u(x)}$  est continue sur  $I$

△ Sur l'intervalle  $]-\infty; 0[$

On a :  $x \mapsto \cos(x)$  est continue sur l'intervalle  $]-\infty; 0[$

Et :  $x \mapsto -1$  est continue sur l'intervalle  $]-\infty; 0[$

Donc :  $x \mapsto \cos(x) - 1$  est continue sur l'intervalle  $]-\infty; 0[$

Et puisque :  $x \mapsto x$  est continue sur l'intervalle  $]-\infty; 0[$

Et :  $\forall x \in ]-\infty; 0[ ; x \neq 0$

Alors :  $x \mapsto \frac{\cos(x) - 1}{x}$  est continue

sur l'intervalle  $]-\infty; 0[$

Et :  $x \mapsto -1$  est continue

sur l'intervalle  $]-\infty; 0[$

Donc :  $x \mapsto \cos(x) - 1$  est continue sur l'intervalle  $]-\infty; 0[$

Et puisque :  $x \mapsto x$  est continue sur l'intervalle  $]-\infty; 0[$

Et :  $\forall x \in ]-\infty; 0[ ; x \neq 0$

Alors :  $x \mapsto \frac{\cos(x) - 1}{x}$  est continue sur l'intervalle  $]-\infty; 0[$

Donc :  $f : x \mapsto \frac{\cos(x) - 1}{x} + \frac{1}{2}$  est continue sur l'intervalle  $]-\infty; 0[$

Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions continues sur l'intervalle  $I$   
avec  $(\forall x \in I) ; v(x) \neq 0$   
Alors la fonction  $x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$  est continue sur  $I$ .

Et comme  $f$  est continue en  $x_0=0$

Alors  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

### EXERCICE 7

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

Montrer que  $f$  est continue en  $x_0=0$

$$\begin{cases} f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right); & x < 0 \\ f(x) = \frac{1-x+\sin(x)-\cos(x)}{x}; & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

### CORRECTION

 Calculons  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

1<sup>ère</sup> méthode

On sait que :  $\forall x \in ]-\infty; 0[; \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$

Donc :  $\forall x \in ]-\infty; 0[; |x| \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$

Donc :  $\forall x \in ]-\infty; 0[; \left| x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$

Donc :  $\forall x \in ]-\infty; 0[; \left| x \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0 \right| \leq |x|$

Et puisque :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = 0$

Alors :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Et par suite :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$

Si on remplace, on trouve "0. cos( $\infty$ )" Mais cos( $\infty$ ) n'existe pas.  
Dans ce cas, il faut penser à l'encadrement.

$$(\forall t \in \mathbb{R}); -1 \leq \cos t \leq 1$$

$|x| > 0$  ou encore

$$(\forall t \in \mathbb{R}); |\cos t| \leq 1$$

Si  $\forall x \in ]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$  avec  $\varepsilon > 0$   
 $|f(x) - l| < h(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$

Alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

2<sup>ème</sup> méthode

On sait que :  $\forall x \in ]-\infty; 0[; -1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

On va multiplier par  $x$  avec  $x < 0$

Donc :  $\forall x \in ]-\infty; 0[; x \leq x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq -x$

or :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Et par suite :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$

Si  $a \leq b$  et  $c \geq 0$

Alors  $ac \leq bc$

Si  $a \leq b$  et  $c \leq 0$

Alors  $ac \geq bc$

Si  $\forall x \in ]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$  avec  $\varepsilon > 0$   
 $g(x) < f(x) < h(x)$

et  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

Alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$



 Calculons  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x + \sin(x) - \cos(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{x} - \frac{x}{x} + \frac{\sin(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \frac{1 - \cos(x)}{x^2} - 1 + \frac{\sin(x)}{x} \\ &= 0 \times \frac{1}{2} - 1 + 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

On a donc :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

D'où :  $f$  est continue en  $x_0 = 0$

Si on remplace  $x$  par  $0$ ,  
on va trouver la forme " $\frac{0}{0}$ ".

Mais  $\begin{cases} 1 - \cos(x) \rightarrow 0 \\ \sin(x) \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0 \end{cases}$

Donc, ça sera mieux de les séparer.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$$

## EXERCICE 8

Calculer les limites suivantes.

1  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - 2x$     2  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 - 1} - 2x$

3  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x$     4  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - x - 1} - 2x + 1$

## CORRECTION

$$\begin{aligned}1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - 2x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} - 2x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 2x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 2x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 2 \right) \\ &= -\infty\end{aligned}$$

Si on remplace, on  
trouve la forme  
indéterminée  $+\infty + (-\infty)$

$\sqrt{x^2 - 1} - 2x$   
Et puisque  $\sqrt{x^2} \neq 2x$   
alors, il suffit  
de factoriser.

$$\begin{aligned}2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 - 1} - 2x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)} - 2x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}} - 2x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}} - 2 \right) \\ &= -\infty\end{aligned}$$

Si on remplace, on  
trouve la forme  
indéterminée  $+\infty + (-\infty)$

$\sqrt[3]{x^3 - 1} - 2x$   
Et puisque  $\sqrt[3]{x^3} \neq 2x$   
alors, il suffit  
de factoriser.

$$\begin{aligned}
 \boxed{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-1} - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}^2 - x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée  $+\infty + (-\infty)$   
 Et puisque  $\sqrt{x^2-1} - x \leftarrow \sqrt{x^2} = x$   
 Alors dans ce cas, il faut multiplier par le conjugué.

$$\begin{aligned}
 \boxed{4} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2-x-1} - 2x + 1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2-x-1}-2x)(\sqrt{4x^2-x-1}+2x)}{\sqrt{4x^2-x-1}+2x} + 1 \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-x-1}^2 - (2x)^2}{\sqrt{4x^2-x-1}+2x} + 1 \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2-x-1-4x^2}{\sqrt{4x^2-x-1}+2x} + 1 \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-1}{\sqrt{x^2(4-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}+2x} + 1 \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-1}{x\sqrt{4-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+2x} + 1 \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-1}{x\sqrt{4-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+2x} + 1 \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(-1-\frac{1}{x})}{x(\sqrt{4-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+2)} + 1 \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{4-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+2} + 1 \\
 &= -\frac{1}{4} + 1 \\
 &= \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée  $+\infty + (-\infty)$   
 Et puisque  $\sqrt{4x^2} = 2x$   
 Alors dans ce cas, il faut multiplier par le conjugué.

Remarquer que  $1$  ne pose aucun problème, c'est pour cela, il faut le laisser loin.

Si on remplace, on va trouver la forme indéterminée  $\frac{\infty}{\infty}$   
 Dans ce cas, et la plupart du temps il faut factoriser

## EXERCICE 9

لَا إِلَهَ إِلَّا أَنْتَ سُبْحَانَكَ إِنِّي كُنْتُ مِنَ الظَّالِمِينَ

Calculer les limites suivantes.

$$\boxed{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3-1} - x \quad \boxed{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^3-x-1} - 2x - 1 \quad \boxed{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-1}$$



## CORRECTION

$$1) \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3-1} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3-1} - x)(\sqrt[3]{x^3-1}^2 + x\sqrt[3]{x^3-1} + x^2)}{\sqrt[3]{x^3-1}^2 + x\sqrt[3]{x^3-1} + x^2} \quad (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3-1}^3 - x^3}{\sqrt[3]{x^3-1}^2 + x\sqrt[3]{x^3-1} + x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-1-x^3}{\sqrt[3]{x^3-1}^2 + x\sqrt[3]{x^3-1} + x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt[3]{x^3-1}^2 + x\sqrt[3]{x^3-1} + x^2}$$

$$= 0$$

Si on remplace, on trouve

la forme indéterminée  $+\infty + (-\infty)$

Et puisque  $\sqrt[3]{x^3} = x$

Alors dans ce cas, il faut multiplier par le conjugué.

$$2) \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^3-x-1} - 2x - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{8x^3-x-1})^3 - (2x)^3}{(\sqrt[3]{8x^3-x-1})^2 + 2x\sqrt[3]{8x^3-x-1} + (2x)^2} - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3-x-1-8x^3}{\left(\sqrt{x^3\left(8-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}\right)^2 + 2x\sqrt[3]{8x^3-x-1} + 4x^2} - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-1}{x^2 \sqrt{\left(8-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)^2} + 2x\sqrt[3]{8x^3-x-1} + 4x^2} - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(-1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(x\sqrt{\left(8-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)^2} + 2\sqrt[3]{8x^3-x-1} + 4x^2\right)} - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1-\frac{1}{x}}{x\sqrt{\left(8-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)^2} + 2\sqrt[3]{8x^3-x-1} + 4x} - 1$$

$$= -1$$

Si on remplace, on

trouve la forme

indéterminée  $+\infty + (-\infty)$

Et puisque  $\sqrt[3]{8x^3} = 2x$

Alors dans ce cas, il faut multiplier par le conjugué.

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

le dénominateur va tendre vers  $+\infty$

$$3) \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} - \sqrt[3]{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \sqrt{1-\frac{1}{x}} - \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}} \left( \sqrt{1-\frac{1}{x}} - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} \sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}} \left( \sqrt{1-\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} \sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} \right)$$

Si on remplace, on trouve la forme indéterminée  $+\infty + (-\infty)$

Et puisque  $\sqrt{x} \neq \sqrt[3]{x}$

Alors, on factorise par  $x^{\frac{1}{2}}$

dont le plus grand puissance

Bien sûr le gagnant c'est  $\sqrt{x}$  au voisinage de  $+\infty$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}} \left( \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - x^{-\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}} \left( \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{6}}} \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left( \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - \sqrt[6]{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} \right) \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

$$\frac{a}{\infty} = 0$$

### EXERCICE 10

Calculer les limites suivantes

$$\boxed{1} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x} \quad \boxed{2} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{x-1}-1} \quad \boxed{3} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}$$

### CORRECTION

$$\begin{aligned}
 \boxed{1} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{4}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}} \left( 1 - x^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}} \left( 1 - x^{-\frac{1}{6}} - x^{-\frac{1}{4}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt[6]{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

Ici, bien sûr, c'est  $x^{\frac{1}{2}}$  qui va gagner  
Donc, il suffit de factoriser par  $x^{\frac{1}{2}}$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \quad \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$$

$$\begin{aligned}
 a^r + a^{r'} &= a^r (1 + a^{r'-r}) \\
 &= a^r (a^{r-r'} + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{2} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{x-1}-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x(1-\frac{1}{x})}-1}{\sqrt{x(1-\frac{1}{x})}-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}-1}{\sqrt{x} \sqrt{1-\frac{1}{x}}-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} \left( \sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)}{\sqrt{x} \left( \sqrt{1-\frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} \left( \sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)}{x^{\frac{1}{2}} \left( \sqrt{1-\frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)}
 \end{aligned}$$

Si on remplace, on va trouver  $\frac{\infty}{\infty}$   
Mais, ici, il y a un combat entre  $\sqrt[3]{x}$  et  $\sqrt{x}$

On factorise le numérateur par  $\sqrt[3]{x}$   
et le dénominateur par  $\sqrt{x}$

Le gagnant bien sûr est  $\sqrt{x}$

لا إِلَهَ إِلَّا أَنْتَ شَهِدْتُ بِكَ وَأَتُوبُ إِلَيْكَ



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} \left( \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{1}{6}} \left( \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{3} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x} - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{3}} - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^{\frac{1}{12}})^6 - 3(x^{\frac{1}{12}})^4 + (x^{\frac{1}{12}})^3}{(x^{\frac{1}{12}})^4 - 1}
 \end{aligned}$$

Posons :  $t = x^{\frac{1}{12}}$

Si :  $x \rightarrow +\infty$

Alors :  $t \rightarrow +\infty$

Et par suite :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^{\frac{1}{12}})^6 - 3(x^{\frac{1}{12}})^4 + (x^{\frac{1}{12}})^3}{(x^{\frac{1}{12}})^4 - 1} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^6 - 3t^4 + t^3}{t^4 - 1} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^6}{t^4} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x} - 1} = +\infty$$

### EXERCICE 11

Ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant  
 $\sqrt[12]{13}$  ;  $\sqrt[6]{8}$  ;  $\sqrt[3]{5}$  ;  $\sqrt{3}$  ;  $\sqrt[4]{6}$

### CORRECTION

كلمات خفيفات على اللسان،  
 ثقلات في البيرات:  
 سُبْحَانَ اللَّهِ وَبِحَمْدِهِ  
 سُبْحَانَ اللَّهِ الْعَظِيمِ

Ici, on peut factoriser  
 le numérateur par  $\sqrt{x}$   
 et le dénominateur par  $\sqrt[3]{x}$

ou bien

utiliser la méthode ci-contre.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n x^n}{b_m x^m} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{b_m} x^{n-m} = \infty \quad n > m \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{b_m} x^{m-n} = 0 \quad m > n \\
 &= \frac{\alpha_n}{b_m} \quad m = n
 \end{aligned}$$

On a :  $\sqrt[12]{13} = 13^{\frac{1}{12}}$  ;  $\sqrt[6]{8} = 8^{\frac{1}{6}}$  ;  $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$  ;  $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$  et  $\sqrt[4]{6} = 6^{\frac{1}{4}}$

(Remarquons que le dénominateur commun entre  $\frac{1}{12}$  ;  $\frac{1}{6}$  ;  $\frac{1}{3}$  ;  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{4}$  est 12)

Donc :  $((13)^{\frac{1}{12}})^{12} = 13$  ;  $((8)^{\frac{1}{6}})^{12} = 8^2 = 64$  ;  $((5)^{\frac{1}{3}})^{12} = 5^4 = 625$  ;

$((3)^{\frac{1}{2}})^{12} = 3^6 = 729$  et  $((6)^{\frac{1}{4}})^{12} = 6^3 = 216$

On a :  $13 < 64 < 216 < 625 < 729$

Donc :  $\sqrt[12]{13} < \sqrt[6]{8} < \sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$

$$a > 0$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

## EXERCICE 12

Simplifier l'expression suivant  $A = \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{32}}{\sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4\sqrt{32}}}$

### CORRECTION

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{32}}{\sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4\sqrt{32}}} \\ &= \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{\frac{5}{12}}} \\ &= \frac{2^{\frac{1}{6} + \frac{3}{4} + \frac{5}{3}}}{2^{\frac{1}{8} + \frac{5}{12}}} \\ &= 2^{\frac{1}{6} + \frac{3}{4} + \frac{5}{3} - \frac{1}{8} - \frac{5}{12}} \\ &= 2^{\frac{49}{24}} \\ &= \sqrt[24]{2^{49}} \end{aligned}$$

$$a > 0$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$a^r \cdot a^{r'} = a^{r+r'}$$

$$(a^r)^{r'} = a^{r \cdot r'}$$

$$\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$$

$$\frac{1}{a^r} = a^{-r}$$

## EXERCICE 13

Calculer les limites suivantes

1  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{5x+3} - 2}{\sqrt{3x+1} - 2}$

2  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{2x^2+x+2} - 2}{x+2}$

3  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

### CORRECTION



$$\begin{aligned}
& \boxed{1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{5x+3} - 2}{\sqrt{3x+1} - 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{5x+3} - 2)((\sqrt[3]{5x+3})^2 + 2\sqrt[3]{5x+3} + 2^2)(\sqrt{3x+1} + 2)}{(\sqrt{3x+1} - 2)(\sqrt{3x+1} + 2)((\sqrt[3]{5x+3})^2 + 2\sqrt[3]{5x+3} + 2^2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{((\sqrt[3]{5x+3})^3 - 2^3)(\sqrt{3x+1} + 2)}{((\sqrt{3x+1})^2 - 2^2)((\sqrt[3]{5x+3})^2 + 2\sqrt[3]{5x+3} + 4)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5x+3-8)(\sqrt{3x+1} + 2)}{(3x+1-4)((\sqrt[3]{5x+3})^2 + 2\sqrt[3]{5x+3} + 4)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5x-5)(\sqrt{3x+1} + 2)}{(3x-3)((\sqrt[3]{5x+3})^2 + 2\sqrt[3]{5x+3} + 4)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)(\sqrt{3x+1} + 2)}{3(x-1)((\sqrt[3]{5x+3})^2 + 2\sqrt[3]{5x+3} + 4)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(\sqrt{3x+1} + 2)}{3((\sqrt[3]{5x+3})^2 + 2\sqrt[3]{5x+3} + 4)} \\
&= \frac{5 \times 4}{3 \times 12} \\
&= \frac{5}{9}
\end{aligned}$$

La forme indéterminer " $\frac{0}{0}$ " et la racine

La plupart du temps, on pense à multiplier par le conjugué.

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

$$\begin{aligned}
& \boxed{2} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{2x^2+x+2} - 2}{x+2} \\
&= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt[3]{2x^2+x+2})^3 - 2^3}{(x+2)((\sqrt[3]{2x^2+x+2})^2 + 2\sqrt[3]{2x^2+x+2} + 2^2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2+x+2-8}{(x+2)((\sqrt[3]{2x^2+x+2})^2 + 2\sqrt[3]{2x^2+x+2} + 4)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2+x-6}{(x+2)((\sqrt[3]{2x^2+x+2})^2 + 2\sqrt[3]{2x^2+x+2} + 4)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x-3)}{(x+2)((\sqrt[3]{2x^2+x+2})^2 + 2\sqrt[3]{2x^2+x+2} + 4)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2x-3)}{(\sqrt[3]{2x^2+x+2})^2 + 2\sqrt[3]{2x^2+x+2} + 4} \\
&= -\frac{7}{12}
\end{aligned}$$

La forme indéterminer " $\frac{0}{0}$ " et la racine

La plupart du temps, on pense à multiplier par le conjugué.

$$a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

$$\begin{aligned}
 & \boxed{3} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2)(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt[3]{x}^3 - \sqrt[3]{a}^3)(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(\sqrt{x}^2 - \sqrt{a}^2)(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2)} \\
 &= \frac{2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{a}^2}
 \end{aligned}$$

On multiplie le numérateur par son conjugué et le dénominateur par son conjugué.

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$$\sqrt[3]{x^3} = x$$

$$\sqrt{x^2} = x$$

### EXERCICE 14

Calculer les limites suivantes.

$$\boxed{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x} \quad \boxed{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2}$$

### CORRECTION

$$\begin{aligned}
 & \boxed{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\tan x} - 1 + 1 - \sqrt{1+\sin x}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\tan x} - 1}{x} + \frac{1 - \sqrt{1+\sin x}}{x}
 \end{aligned}$$

Calculons  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\tan x} - 1}{x}$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\tan x} - 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+\tan x} - 1)((\sqrt[3]{1+\tan x})^2 + 1\sqrt[3]{1+\tan x} + 1^2)}{x((\sqrt[3]{1+\tan x})^2 + 1\sqrt[3]{1+\tan x} + 1^2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+\tan x})^3 - 1^3}{x((\sqrt[3]{1+\tan x})^2 + \sqrt[3]{1+\tan x} + 1^2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan x - 1}{x((\sqrt[3]{1+\tan x})^2 + \sqrt[3]{1+\tan x} + 1^2)}
 \end{aligned}$$

$$\text{On a } \begin{cases} \sqrt[3]{1+\tan x} \rightarrow 1 \\ \sqrt{1+\sin x} \rightarrow 1 \end{cases}$$

Donc, il faut soustraire puis ajouter 1 et séparer les limites

Dans ce cas, il faut multiplier par le conjugué

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

$$a = \sqrt[3]{1+\tan x}$$

$$b = 1$$



$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x \left( (\sqrt[3]{1+\tan x})^2 + \sqrt[3]{1+\tan x} + 1^2 \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \times \frac{1}{\left( (\sqrt[3]{1+\tan x})^2 + \sqrt[3]{1+\tan x} + 1^2 \right)} \\
&= 1 \times \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Calculons  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 + \sin x}}{x}$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 + \sin x}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1 + \sin x})(1 + \sqrt{1 + \sin x})}{x(1 + \sqrt{1 + \sin x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1^2 - (\sqrt{1 + \sin x})^2}{x(1 + \sqrt{1 + \sin x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + \sin x)}{x(1 + \sqrt{1 + \sin x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{x(1 + \sqrt{1 + \sin x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{(1 + \sqrt{1 + \sin x})} \\
&= -1 \times \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

[2]  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(\sqrt[4]{x} - 1)^2}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)^2}{(\sqrt[4]{x} - 1)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} \right)^2 \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt[4]{x^2} + 1)}{(\sqrt[4]{x} - 1)(\sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt[4]{x^2} + 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} \right)^2 \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{(x-1)(\sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt[4]{x^2} + 1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} \right)^2 \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{(\sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt[4]{x^2} + 1)}{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} \right)^2 \\
&= \frac{16}{9}
\end{aligned}$$

Dans ce cas,  
il faut  
multiplier par  
le conjugué

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$a = 1$$

$$b = \sqrt{1 + \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Dans ce cas,  
il faut  
multiplier par  
le conjugué

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$\begin{aligned}
a^4 - b^4 &= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \\
&= (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)
\end{aligned}$$

## EXERCICE 15

1 ~ Déterminer les deux réels  $a$  et  $b$  tels que:  
 $x^3 - 3x - 18 = (x-3)(x^2 + ax + b)$

2 ~ On pose  $t = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

a ~ Vérifier que  $t$  est une solution de l'équation:  
 $x^3 - 3x - 18 = 0$

$$\begin{aligned} \text{rappel } (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3ab(a+b) + b^3 \end{aligned}$$

b ~ En déduire que  $t=3$

## CORRECTION

1 ~ Déterminons  $a$  et  $b$

$$\begin{aligned} x^3 - 3x - 18 &= (x-3)(x^2 + ax + b) \\ &= x^3 + ax^2 + bx - 3x^2 - 3ax - 3b \end{aligned}$$

$$x^3 + 0x^2 - 3x - 18 = x^3 + (a-3)x^2 + (b-3a)x - 3b$$

$$\text{Par identification ; on aura : } \begin{cases} a-3=0 \\ b-3a=-3 \\ -3b=-18 \end{cases} \iff \begin{cases} a=3 \\ b=6 \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \boxed{x^3 - 3x - 18 = (x-3)(x^2 + 3x + 6)}$$

2 ~ a ~ Vérifions que  $t$  est une solution de l'équation:  $x^3 - 3x - 18 = 0$ .

Il suffit de vérifier que:  $t^3 - 3t - 18 = 0$ .

On a:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

$$\begin{aligned} t^3 &= \left( \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} \right)^3 \\ &= \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}^3 + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}^3 + 3 \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} \left( \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} \right) \\ &= 9+4\sqrt{5} + 9-4\sqrt{5} + 3 \sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})} \times t \\ &= 18 + 3 \sqrt[3]{9^2 - (4\sqrt{5})^2} \times t \end{aligned}$$

$$\boxed{9^2 - (4\sqrt{5})^2 = 1}$$

$$t^3 = 18 + 3t$$

$$\text{Donc : } t^3 - 3t - 18 = 18 + 3t - 3t - 18 = 0$$

Et par suite ;  $t$  est une solution de l'équation:  $x^3 - 3x - 18 = 0$

b ~ Déduisons que :  $t=3$



Pour cela, il faut résoudre l'équation :  $x^3 - 3x - 18 = 0$

$$\begin{aligned} x^3 - 3x - 18 = 0 &\iff (x-3)(x^2+3x+6)=0 \\ &\iff x-3=0 \text{ ou } x^2+3x+6=0 \\ &\iff x=3 \text{ ou } x^2+3x+6=0 \end{aligned}$$

Considérons l'équation :  $x^2+3x+6=0$

Son discriminant est :  $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -15$

Puisque :  $\Delta < 0$

Alors l'équation :  $x^2+3x+6=0$  n'admet aucune solution

Donc :  $x^3 - 3x - 18 = 0 \iff x = 3$

C'est-à-dire que la seule solution de l'équation :  $x^3 - 3x - 18 = 0$  est  $x = 3$

Et puisque  $t$  est une solution de l'équation :  $x^3 - 3x - 18 = 0$

Alors :  $t = 3$

### EXERCICE 16

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes

- ①  $x^4 - 16 = 0$     ②  $x^6 + 3 = 0$     ③  $x^7 - 3 = 0$     ④  $x^7 + 3 = 0$   
 ⑤  $x^8 + 3x^4 - 10 = 0$

### CORRECTION

$$\begin{aligned} \text{① } x^4 - 16 = 0 &\iff x^4 = 16 \\ &\iff x = \sqrt[4]{16} \text{ ou } x = -\sqrt[4]{16} \\ &\iff x = 2 \text{ ou } x = -2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } S = \{-2; 2\}$$

Si  $x^{2n} = a$  avec  $a > 0$   
 Alors  $x = \sqrt[n]{a}$  ou  $x = -\sqrt[n]{a}$

$$\text{② } x^6 + 3 = 0 \iff x^6 = -3$$

Equation impossible, le fait que :  $x^6 \geq 0$  et  $-3 < 0$

$$\text{D'où : } S = \emptyset$$

$$\begin{aligned} \text{③ } x^7 - 3 = 0 &\iff x^7 = 3 \\ &\iff x = \sqrt[7]{3} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } S = \{\sqrt[7]{3}\}$$

Si  $x^{2n+1} = a$  avec  $a > 0$   
 Alors  $x = \sqrt[n]{a}$

$$\begin{aligned}
 [4] \quad x^7 + 3 &= 0 \iff x^7 = -3 \\
 &\iff -x^7 = 3 \\
 &\iff (-x)^7 = 3 \\
 &\iff -x = \sqrt[7]{3} \\
 &\iff x = -\sqrt[7]{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } S = \{-\sqrt[7]{3}\}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Si } x^{2n+1} = a \text{ avec } a < 0 \\
 &\text{Alors } x = -\sqrt[2n+1]{-a}
 \end{aligned}$$

$$[5] \quad x^8 + 3x^4 - 10 = 0 \iff (x^4)^2 + 3x^4 - 10 = 0$$

$$\text{On pose : } t = x^4$$

$$\text{L'équation } x^8 + 3x^4 - 10 = 0 \text{ devient :}$$

$$t^2 + 3t - 10 = 0$$

$$\text{Soit donc l'équation : } t^2 + 3t - 10 = 0$$

$$\text{Son discriminant : } \Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(1)(-10) = 49$$

$$\text{puisque : } \Delta > 0$$

Alors l'équation  $t^2 + 3t - 10 = 0$  admet deux solutions distinctes :

$$t_1 = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2}$$

$$t_1 = 2 \quad \text{et} \quad t_2 = -5$$

$$\text{Or } t = x^4$$

$$\text{Donc : } x^4 = 2 \text{ ou } x^4 = -5$$

$$\text{Donc : } x = \sqrt[4]{2} \text{ ou } x = -\sqrt[4]{2}$$

$$\text{D'où : } S = \{-\sqrt[4]{2}; \sqrt[4]{2}\}$$

$$\begin{aligned}
 &ax^{2n} + bx^n + c = 0 \\
 &\text{il faut juste} \\
 &\text{effectuer le} \\
 &\text{changement} \\
 &\text{de variable } t = x^n
 \end{aligned}$$

$$x^4 = -5 \text{ Equation impossible}$$

## EXERCICE 17

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes

$$[1] \quad \sqrt[3]{3+x} + \sqrt[3]{3-x} = \sqrt[3]{6} \quad [2] \quad \sqrt[3]{(2+x)^2} + \sqrt[3]{(2-x)^2} = 2\sqrt[3]{4-x^2}$$

## CORRECTION

[1] Déterminons d'abord  $\mathcal{D}_E$ ; l'ensemble de définition

$$\text{On pose : } (E) : \sqrt[3]{3+x} + \sqrt[3]{3-x} = \sqrt[3]{6}$$



$$\begin{aligned}
 x \in \mathcal{D}_E &\iff 3+x \geq 0 \text{ et } 3-x \geq 0 \\
 &\iff x \geq -3 \text{ et } x \leq 3 \\
 &\iff -3 \leq x \leq 3
 \end{aligned}$$

Donc:  $\mathcal{D}_E = [-3; 3]$

Soit  $x \in \mathcal{D}_E$

$$(E) \iff (\sqrt[3]{3+x} + \sqrt[3]{3-x})^3 = \sqrt[3]{6^3}$$

$$\iff \sqrt[3]{3+x}^3 + \sqrt[3]{3-x}^3 + 3\sqrt[3]{3+x}\sqrt[3]{3-x}(\sqrt[3]{3+x} + \sqrt[3]{3-x}) = 6$$

$$\iff 3+x+3-x+3\sqrt[3]{3+x}\sqrt[3]{3-x} \cdot \sqrt[3]{6} = 6$$

$$\iff 6+3\sqrt[3]{3+x}\sqrt[3]{3-x} \cdot \sqrt[3]{6} - 6 = 0$$

$$\iff 3\sqrt[3]{3+x}\sqrt[3]{3-x} \cdot \sqrt[3]{6} = 0$$

$$\iff \sqrt[3]{3+x}\sqrt[3]{3-x} = 0$$

$$\iff \sqrt[3]{3+x}\sqrt[3]{3-x} = 0$$

$$\iff \sqrt[3]{3+x} = 0 \text{ ou } \sqrt[3]{3-x} = 0$$

$$\iff 3+x = 0 \text{ ou } 3-x = 0$$

$$\iff x = -3 \text{ ou } x = 3$$

Et puisque  $-3 \in \mathcal{D}_E$  et  $3 \in \mathcal{D}_E$

Alors:  $S = \{-3; 3\}$

$$\boxed{2} \quad \sqrt[3]{(2+x)^2} + \sqrt[3]{(2-x)^2} = 2\sqrt[3]{4-x^2}$$

On pose: (E):  $\sqrt[3]{(2+x)^2} + \sqrt[3]{(2-x)^2} = 2\sqrt[3]{4-x^2}$

Déterminons d'abord  $\mathcal{D}_E$ : l'ensemble de définition de l'équation

$$x \in \mathcal{D}_E \iff (2+x)^2 \geq 0 \text{ et } (2-x)^2 \geq 0 \text{ et } 4-x^2 \geq 0$$

$$\iff x \in \mathbb{R} \text{ et } x \in \mathbb{R} \text{ et } (2+x)(2-x) \geq 0$$

$$\iff (2+x)(2-x) \geq 0$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
$2-x$	+	+	○	-
$2+x$	-	○	+	+
$(2+x)(2-x)$	-	○	+	-

$$\mathcal{D}_E = [-2; 2]$$



$$\sqrt[n]{u(x)} \text{ ----- } \rightarrow u(x) \geq 0$$

$$a = b \iff a^{2n+1} = b^{2n+1} \quad \checkmark$$

$$a = b \not\iff a^{2n} = b^{2n} \quad \text{!}$$

$$a = b \Rightarrow a^{2n} = b^{2n} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned}
 (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 &= a^3 + 3ab(a+b) + b^3
 \end{aligned}$$

On remplace  $\sqrt[3]{3+x} + \sqrt[3]{3-x}$   
par  $\sqrt[3]{6}$

$$ab = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0$$

ERREUR  
404

Si  $(2+x)(2-x) \geq 0$

Alors  $2+x \geq 0$  ou  $2-x \geq 0$



Ça va très bien!

Pour étudier le signe  
de  $(2+x)(2-x)$   
ça sera mieux de  
dresser le tableau  
de signe

(Remarquons que sur  $\mathcal{D}_E$  ; on a :  $2-x \geq 0$  et  $2+x \geq 0$ )

Donc , on peut écrire :  $\begin{cases} \sqrt[3]{(2+x)^2} = \sqrt[3]{(2+x)}^2 \\ \sqrt[3]{(2-x)^2} = \sqrt[3]{(2-x)}^2 \end{cases}$

**ATTENTION**  
Read Me

$$\begin{cases} \sqrt{a^2} = a \text{ avec } a > 0 \\ \sqrt{a^2} = |a| \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt[3]{(2+x)^2} + \sqrt[3]{(2-x)^2} - 2\sqrt[3]{4-x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(2+x)^2} + \sqrt[3]{(2-x)^2} - 2\sqrt[3]{(2+x)(2-x)} = 0$$

Si  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$

Alors  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$

PLEASE  
READ  
ME

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(2+x)^2} + \sqrt[3]{(2-x)^2} - 2\sqrt[3]{(2+x)}\sqrt[3]{(2-x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( \sqrt[3]{(2+x)} - \sqrt[3]{(2-x)} \right)^2 = 0$$



En générale



$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(2+x)} - \sqrt[3]{(2-x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(2+x)} = \sqrt[3]{(2-x)}$$

$$\Leftrightarrow 2+x = 2-x$$

$$\Leftrightarrow x+x = 2-2$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

D'où :  $x = 0$

Et puisque :  $0 \in \mathcal{D}_E$

Alors :  $S = \{0\}$

Si  $a$  et  $b$  ont le même signe  
Alors  $\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \sqrt{|b|}$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

### EXERCICE 18

1. Montrer que l'équation  $x^3 + x - 1 = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $]0;1[$

2. En utilisant la méthode de dichotomie, donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0,25.

3. Montrer que :  $\alpha = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}$

### CORRECTION

1. Posons :  $f(x) = x^3 + x - 1$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ  
وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا  
رَبَّيْنِي صَغِيرًا




On a  $f$  est continue sur l'intervalle  $[0;1]$  Car  $f$  est un polynôme

$$\text{et : } \begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

Juste une application  
directe du T.V.I

$$\text{Donc : } f(0) \times f(1) < 0$$

Donc, d'après T.V.I l'équation  $f(x)=0$  admet au moins une solution  $\alpha$  tel que :  $0 < \alpha < 1$

 Pour montrer que  $\alpha$  est unique, il suffit de vérifier que  $f$  est strictement monotone sur l'intervalle  $[0;1]$

 Étudions la monotonie de  $f$  sur  $[0;1]$

On a  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[0;1]$  (polynôme)

Soit  $x \in [0;1]$

$$\text{On a : } f'(x) = (x^3 + x - 1)'$$


$$\text{Donc : } f'(x) = 3x^2 + 1 ; \text{ pour tout } x \in [0;1]$$

$$\text{On a : } \forall x \in [0;1] ; f'(x) > 0$$

Donc :  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0;1]$

D'où :  $\alpha$  est unique

②. Déterminons un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0,25

 On a  $\alpha \in ]0;1[$

 L'amplitude de l'intervalle  $]0;1[$  est :  $1 - 0 = 1$

 Le centre de l'intervalle  $]0;1[$  est :  $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\text{On a : } f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$$

$$\text{Et on a : } f(1) = 1$$

$$\text{Donc : } f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) < 0$$

$$\text{Donc : } \boxed{\alpha \in ]0,5;1[}$$

 L'amplitude de l'intervalle  $]0,5;1[$  est :  $1 - 0,5 = 0,5$

 Le centre de l'intervalle  $]0,5;1[$  est :  $\frac{0,5+1}{2} = \frac{3}{4}$

$$\text{On a : } f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{11}{64}$$

Donc :  $f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{3}{4}\right) < 0$

Donc :  $\alpha \in \left] \frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right[$

🐦 L'amplitude de l'intervalle  $\left] \frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right[$  est  $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = 0,25$

D'où :  $\alpha \in \left] \frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right[$

3 ~

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \iff \alpha = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{\alpha}{\alpha^2} \\ &\iff \alpha \cdot \alpha^2 = 1 - \alpha \\ &\iff \alpha^3 = 1 - \alpha \\ &\iff \alpha^3 + \alpha - 1 = 0 \end{aligned}$$

D'où :  $\alpha = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}$

Ici, pour déterminer  $\alpha$  en fonction de  $\alpha$  on essaie de commencer par le résultat demandé  $\alpha = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}$  et on transforme pour la rendre sous forme  $f(\alpha) = 0$

### EXERCICE 19

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a; b]$  et à valeur dans l'intervalle  $[a; b]$

$$(\forall x \in [a; b]; f(x) \in [a; b])$$

Montrer que la fonction  $f$  admet au moins un point fixe  $(c \text{ à } d : (\exists c \in [a; b]); f(c) = c)$

### CORRECTION

Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle par :

$$g(x) = f(x) - x$$

On a :  $f$  est continue sur l'intervalle  $[a; b]$

et :  $x \mapsto -x$  est continue sur l'intervalle  $[a; b]$  polynôme

Donc  $g$  est continue sur l'intervalle  $[a; b]$

Comme étant somme de deux fonctions continues.

Et puisque  $\forall x \in [a; b]; f(x) \in [a; b]$

Alors :  $a \leq f(a) \leq b$  et  $a \leq f(b) \leq b$



Donc :  $f(a) - a \geq 0$  et  $f(b) - b \leq 0$

On a trois cas possibles.

**1<sup>er</sup> Cas** où  $f(a) = a$  : C'est fini  $c = a$  convient

**2<sup>ème</sup> Cas** où  $f(b) = b$  : C'est fini  $c = b$  convient

**3<sup>ème</sup> Cas** où  $f(a) \neq a$  et  $f(b) \neq b$  :

Alors ; on aura :  $g(a) > 0$  et  $g(b) < 0$

Donc :  $g(a) \cdot g(b) < 0$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaire, il existe au moins un réel  $c \in ]a; b[$  tel que :  $g(c) = 0$

Et par suite, il existe au moins un réel  $c \in [a; b]$

tel que  $f(c) = c$

## EXERCICE 20

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. a. Calculer  $f'(x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$

b. Dresser le tableau de variations de  $f$

c. Déterminer  $f(-\infty; 0]$ ,  $f([0; 2])$  et  $f([0; 3])$

3. a. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement trois solutions  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  tels que :  $\alpha < 0$ ,  $0 < \beta < 2$  et  $\gamma > 0$

b. Étudier le signe  $f$  sur  $\mathbb{R}$

4. Montrer que l'équation  $f(x) = 2$  admet une solution unique  $\lambda$  sur  $\mathbb{R}$  et vérifier que  $\lambda \in ]3; 4[$

## CORRECTION

1. Calcul des limites

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \\ &= -\infty \end{aligned}$$

En  $+\infty$  et en  $-\infty$ , un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \\ = +\infty$$

2. Calculons  $f'(x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$

On a  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

Soit  $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 1)' \\ = 3x^2 - 6x \\ = 3x(x-2)$$

D'où:  $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = 3x(x-2)$

6. Étudions le signe de  $f'(x)$

On a:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \\ \Leftrightarrow 3x = 0 \text{ ou } x-2 = 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	○	+
$3x$	-	○	+	+
$3x(x-2)$	+	○	-	+

Donc:

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	+

Tableau de variations de  $f$

$$a' = 0 \quad (ax)' = a$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(ax^n)' = a n x^{n-1}$$

Il faut toujours factoriser  
~ Si possible ~

Comment étudier le signe de  $f'(x)$ ?

On détermine les racines de  $f'(x)$

On dresse le tableau de signe de  $f'(x)$

Comment dresser le tableau de variations de  $f$ ?

On a  $D_f = \mathbb{R}$

Donc  $x$  prend toutes les valeurs de  $\mathbb{R}$


Placer le signe de  $f'(x)$

Déduire la monotonie de  $f$



$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$1$	$-3$	$+\infty$

c. Déterminons  $f(]-\infty; 0])$ ;  $f([0; 2])$  et  $f([0; 3])$

  $f(]-\infty; 0])$

On a :  $f$  est continue et strictement croissante sur  $]-\infty; 0]$

Donc :  $f(]-\infty; 0]) = ]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(0)]$


D'où :  $f(]-\infty; 0]) = ]-\infty; 1]$

  $f([0; 2])$

On a :  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $[0; 2]$

Donc :  $f([0; 2]) = [f(2); f(0)]$

D'où :  $f([0; 2]) = [-3; 1]$

  $f([0; 3])$

Dans ce cas, on a  $f$  est continue sur l'intervalle  $[0; 3]$ , mais n'est pas strictement monotone

Donc, on a :  $f([0; 3]) = [\inf_{x \in [0; 3]} f(x); \sup_{x \in [0; 3]} f(x)]$

On a, d'après le tableau de variations de  $f$

$$\begin{cases} \inf_{x \in [0; 3]} f(x) = f(2) = -3 \\ \sup_{x \in [0; 3]} f(x) = f(0) = f(1) = 1 \end{cases}$$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement décroissante

On peut aussi séparer les intervalles

$$\begin{aligned} f([0; 3]) &= f([0; 2]) \cup f([2; 3]) \\ &= [-3; 1] \cup [-3; 1] \\ &= [-3; 1] \end{aligned}$$

D'où:  $f([0;3]) = [-3;1]$

$\exists, \alpha \in \mathbb{R}$

 Sur l'intervalle  $]-\infty; 0]$

On a  $f$  est continue et strictement croissante sur  $]-\infty; 0]$

Et:  $f(]-\infty; 0]) = ]-\infty; 1]$

Et puisque:  $0 \in ]-\infty; 1]$

Donc, il existe un réel unique  $\alpha \in ]-\infty; 0[$  tel que  $f(\alpha) = 0$   $\alpha \neq 0$

Autrement dit, l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  tel que  $\alpha \in ]-\infty; 0[$

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur  $I$ , alors:

$$(\forall y \in f(I)) (\exists ! x \in I); f(x) = y$$

 Sur l'intervalle  $[0; 2]$

On a  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $[0; 2]$

Et:  $f([0; 2]) = [-3; 1]$

Et puisque:  $0 \in [-3; 1]$

Donc, il existe un réel unique  $\beta \in ]0; 2[$  tel que  $f(\beta) = 0$   $\begin{cases} \beta \neq 0 \\ \beta \neq 2 \end{cases}$

Autrement dit, l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  tel que  $\beta \in ]0; 2[$

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur  $I$ , alors:

$$(\forall y \in f(I)) (\exists ! x \in I); f(x) = y$$

 Sur l'intervalle  $[2; +\infty[$

On a  $f$  est continue et strictement croissante sur  $]-\infty; 0]$

Et:  $f([2; +\infty[) = [-3; +\infty[$



Et puisque :  $0 \in [-3; +\infty[$

Donc, il existe un réel unique

$\gamma \in [2; +\infty[$  tel que  $f(\gamma) = 0$   $\alpha \neq 0$

Autrement dit, l'équation

$f(x) = 0$  admet une solution

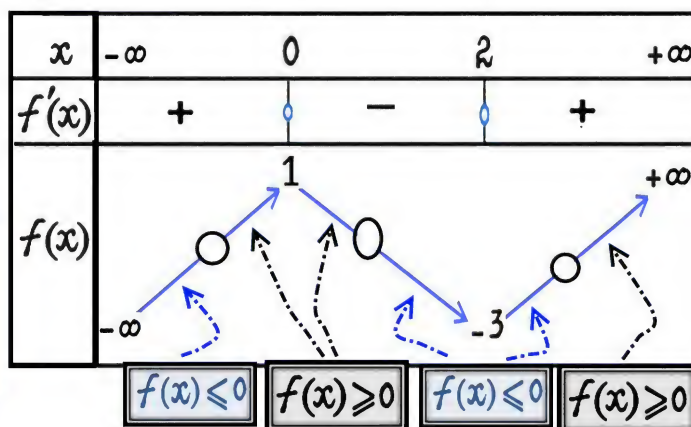
unique  $\alpha$  tel que  $\gamma \in [2; +\infty[$

En Le signe de  $f(x)$

D'après le tableau

de variations de  $f$ , on a :

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty; \alpha] \cup [\beta; \gamma]; f(x) \leq 0 \\ \forall x \in ]\alpha; \beta[ \cup ]\gamma; +\infty[; f(x) \geq 0 \end{cases}$$



4. Montrons que l'équation  $f(x) = 2$  admet une solution unique  $\lambda$  sur  $\mathbb{R}$ ; et que  $\lambda \in ]3; 4[$

Sur l'intervalle  $]-\infty; 2]$

On a : 1 est une valeur maximale de  $f$

Donc :  $\forall x \in ]-\infty; 2]; f(x) \leq 1$

Et par suite :  $\forall x \in ]-\infty; 2]; f(x) \neq 2$

Donc l'équation  $f(x) = 2$  n'admet aucune solution sur  $]-\infty; 2]$

Sur l'intervalle  $[2; +\infty[$

On a  $f$  est continue et strictement croissante sur

l'intervalle  $[2; +\infty[$

Et  $f([2; +\infty[) = [-3; +\infty[$

Et puisque  $2 \in [-3; +\infty[$

Alors, l'équation  $f(x) = 2$  admet une solution unique  $\lambda$  sur  $[2; +\infty[$

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur  $I$ , alors :

$$(\forall y \in f(I)) (\exists ! x \in I); f(x) = y$$

Si  $M$  est une valeur maximale de  $f$  sur un intervalle  $I$  alors :

$$(\forall x \in I); f(x) \leq M$$

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur  $I$ , alors :

$$(\forall y \in f(I)) (\exists ! x \in I); f(x) = y$$

## Conclusion

L'équation  $f(x)=2$  admet une solution unique  $\lambda$  sur  $\mathbb{R}$

✎ Vérifions que:  $\lambda \in ]3;4[$

On a:  $f$  est continue sur  $[3;4]$

$$\text{Et: } \begin{cases} f(3)=1 \\ f(4)=17 \end{cases}$$

Donc:  $f(3) < 2 < f(4)$

Et puisque  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[3;4]$

Alors: d'après **T.V.I**, l'équation  $f(x)=2$  admet une solution unique  $\lambda$  tel que:  $3 < \lambda < 4$

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur  $[\alpha; \beta]$ , alors:

$$(\forall y \in f([\alpha; \beta])) (\exists ! x \in [\alpha; \beta]); f(x) = y$$

## EXERCICE 21

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^2 + 2x - 1$

1. Calculons  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. a. Étudier la monotonie de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

b. Est-ce que  $f$  admet une fonction réciproque?

3. Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I = ]-\infty; -1]$

a. Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  dont on déterminera.

b. Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$

## CORRECTION

1. Calcul des limites:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2x - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

En  $+\infty$  et en  $-\infty$ , un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré



2. a. On a  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

Soit  $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x^2 + 2x - 1)'$$

$$f'(x) = 2x + 2$$

Donc :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 2x + 2$

$$a' = 0 \quad (ax)' = a$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(a x^n)' = a n x^{n-1}$$

 Étudions le signe de  $f'(x)$

$$f'(x) = 0 \iff 2x + 2 = 0$$

$$\iff x = -1$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\circ$	$+$

Donc :  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]-\infty; -1]$  ;  
et strictement croissante sur l'intervalle  $[-1; +\infty[$

b. On a  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Mais n'est pas strictement monotone

Donc  $f$  n'admet pas une fonction réciproque

3. a.

On a  $g$  est continue sur

l'intervalle  $I = ]-\infty; -1]$

Et  $g$  est strictement

décroissante sur  $I$

Donc  $g$  admet une fonction  
réciproque  $g^{-1}$  définie sur  
un intervalle  $J$  tel que

$$J = g(I)$$

$$J = g(]-\infty; -1])$$

$$= [g(-1); \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)[$$

$$= [-2; +\infty[$$

b. Déterminons  $g^{-1}(x)$

Si  $g$  est une fonction  
continue et strictement  
monotone sur un  
intervalle  $I$

Alors,  $g$  admet une  
une fonction réciproque  
 $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  
 $J$  tel que  $J = g(I)$

Il suffit d'appliquer  
l'image d'un  
intervalle par  
une fonction  
continue et strictement  
décroissante

Soit  $x \in J$ , on cherche  $y \in I$  tel que  $g(y) = x$   $y$  est unique

$$g(y) = x \Leftrightarrow y^2 + 2y - 1 = x$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2y = x + 1$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 = x + 1 + 1$$

$$\Leftrightarrow (y+1)^2 = x+2$$

$$\Leftrightarrow y+1 = \sqrt{x+2} \text{ ou } y+1 = -\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow y = -1 + \sqrt{x+2} \text{ ou } y = -1 - \sqrt{x+2}$$

Pour déterminer  $g^{-1}(x)$   
On prend  $x \in J$  et on  
cherche l'unique  $y \in I$   
tel que  $g(y) = x$

Or  $y \in ]-\infty; -1]$

Donc:  $y = -1 - \sqrt{x+2}$

D'où:  $(\forall x \in J); g^{-1}(x) = -1 - \sqrt{x+2}$

## EXERCICE 22

Soit  $f$  la fonction définie par:  $f(x) = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}$

1. a. Déterminer  $D_f$ , le domaine de définition de  $f$

b. Montrer que  $f$  est une fonction impaire, puis  
calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

2. a. En utilisant la définition, montrer que  $f$  est une  
fonction strictement décroissante sur l'intervalle  $]0; 1]$

b. En déduire la monotonie de  $f$  sur l'intervalle  $[-1; 0[$

3. Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I = ]0; 1]$

a. Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$   
définie sur un intervalle  $J$  dont on déterminera.

b. Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$

## CORRECTION



1. a. Déterminons  $\mathcal{D}_f$

$$x \in \mathcal{D}_f \iff x \neq 0 \text{ et } 1-x^2 \geq 0$$

$$\iff x \neq 0 \text{ et } (1-x)(1+x) \geq 0$$

Étudions le signe de  $(1-x)(1+x)$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$1-x$	+	+	○	-
$1+x$	-	○	+	+
$(1-x)(1+x)$	-	○	+	-

Donc :  $x \in \mathcal{D}_f \iff x \neq 0 \text{ et } x \in [-1; 1]$

D'où :  $\mathcal{D}_f = [-1; 0[ \cup ]0; 1]$

$$\frac{u(x)}{v(x)} \text{ --- } \rightarrow v(x) \neq 0$$

$$\sqrt{u(x)} \text{ --- } \rightarrow u(x) \geq 0$$

ERREUR  
404

Si  $(1-x)(1+x) \geq 0$

Alors  $1-x \geq 0$  ou  $1+x \geq 0$



Ça va très bien !

Pour étudier le signe de  $(1-x)(1+x)$   
ça sera mieux de dresser le tableau de signe

b. Montrons que  $f$  est une fonction impaire

On a :  $\mathcal{D}_f = [-1; 0[ \cup ]0; 1]$

Donc :  $-x \in \mathcal{D}_f$  ; pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$

Soit  $x \in \mathcal{D}_f$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1 + \sqrt{1 - (-x)^2}}{-x} \\ &= \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{-x} \\ &= -\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Donc  $f$  est impaire

Calculons  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} = +\infty$$

Si on remplace  $x$  par  $0^+$ ,  
on trouve  $\frac{2}{0^+} = +\infty$

2. Étudions la monotonie de  $f$  sur  $]0; 1]$

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $]0; 1]$  tels que  $x < y$

$$(-x)^2 = x^2$$

$$|-x| = |x|$$


$$f \text{ est impaire} \iff \begin{cases} (i) (\forall x \in \mathcal{D}_f); -x \in \mathcal{D}_f \\ (ii) (\forall x \in \mathcal{D}_f); f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Si  $f$  est paire (ou impaire)  
Alors, il suffit d'étudier  $f$   
sur  $\mathcal{D}_E = \mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}^+$   
 $\mathcal{D}_E$  : Domaine d'étude.

$$\begin{aligned}
x < y &\Rightarrow x^2 < y^2 \text{ et } \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \\
&\Rightarrow -x^2 > -y^2 \text{ et } \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \\
&\Rightarrow 1-x^2 > 1-y^2 \text{ et } \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \\
&\Rightarrow \sqrt{1-x^2} > \sqrt{1-y^2} \text{ et } \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \\
&\Rightarrow 1+\sqrt{1-x^2} > 1+\sqrt{1-y^2} \text{ et } \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \\
&\Rightarrow \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} > \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \\
&\Rightarrow f(x) > f(y)
\end{aligned}$$

$f$  est strictement décroissante sur  $I$  si et seulement si  $(\forall (x; y) \in I^2);$   
 $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Donc  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]0; 1]$

 La monotonie de  $f$  sur l'intervalle  $[-1; 0[$

On a  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]0; 1]$

Et puisque  $f$  est une fonction impaire

Alors:  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $[-1; 0[$

3 ~ a ~ Soit  $g(x) = f(x)$  pour tout  $x \in ]0; 1]$

On a:  $x \mapsto 1-x^2$  est continue sur  $I$  *polynôme*

Et:  $(\forall x \in I); 1-x^2 \geq 0$

Donc:  $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$  est continue sur  $I$

Et on a:  $x \mapsto 1$  est continue sur  $I$

Donc:  $x \mapsto 1+\sqrt{1-x^2}$  est continue sur  $I$

Et puisque:  $x \mapsto x$  est continue sur  $I$

Et:  $(\forall x \in I); x \neq 0$

Alors:  $g: x \mapsto \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$  est continue sur  $I$

Si  $u$  est une fonction continue sur l'intervalle  $I$   
 Et  $(\forall x \in I); u(x) \geq 0$   
 Alors:  $x \mapsto \sqrt{u(x)}$  est continue sur  $I$

Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions continues sur l'intervalle  $I$   
 avec  $(\forall x \in I); v(x) \neq 0$   
 Alors la fonction  $x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$  est continue sur  $I$ .

 On a  $g$  est continue sur l'intervalle  $I = ]0; 1]$

Et  $g$  est strictement décroissante sur  $I$

Donc  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  tel que:  $J = g(I)$



$$J = g([0;1])$$

$$= [g(1); \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)[$$

$$= [1; +\infty[$$

b. Déterminons  $g^{-1}(x)$

Soit  $x \in J$ , on cherche  $y \in I$   
tel que  $g(y) = x$

$$g(y) = x \iff \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} = x$$

$$\iff 1 + \sqrt{1 - y^2} = xy$$

$$\iff \sqrt{1 - y^2} = xy - 1$$

$$\iff 1 - y^2 = (xy - 1)^2$$

$$\iff 1 - y^2 = x^2 y^2 - 2xy + 1$$

$$\iff x^2 y^2 + y^2 - 2xy + 1 - 1 = 0$$

$$\iff y(x^2 y + y - 2x) = 0$$

$$\iff y = 0 \text{ ou bien } x^2 y + y - 2x = 0$$

$$\iff y = 0 \text{ ou bien } x^2 y + y = 2x$$

$$\iff y = 0 \text{ ou bien } y(x^2 + 1) = 2x$$

$$\iff y = 0 \text{ ou bien } y = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad (x^2 + 1 \neq 0)$$

Or  $y \in ]0;1]$

$$\text{Donc : } y = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$\text{D'où : } (\forall x \in J); g^{-1}(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

### EXERCICE 23

Si  $g$  est une fonction  
continue et strictement  
monotone sur un  
intervalle  $I$

Alors,  $g$  admet une  
une fonction réciproque  
 $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  
 $J$  tel que  $J = g(I)$

Pour déterminer  $g^{-1}(x)$   
On prend  $x \in J$  et on  
cherche l'unique  $y \in I$   
tel que  $g(y) = x$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$ab = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0$$

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par:

$$f(x) = \frac{1}{x} + 1 - \sqrt{x}$$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
2. En utilisant la définition, étudier la monotonie de  $f$  sur  $]0; +\infty[$
3. a. Montrer que l'équation:  $\frac{1}{x} + 1 = \sqrt{x}$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]0; +\infty[$  et que  $\alpha \in ]2; 3[$
- b. En utilisant la méthode de dichotomie, donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0,5

### CORRECTION

1. Calculons  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} + 1 - \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 1 - \sqrt{x} = -\infty$$

Il suffit de remplacer.

$$\frac{\alpha}{\infty} = 0 \quad \frac{\alpha}{0} = \infty$$

2. La monotonie de  $f$  sur  $]0; +\infty[$

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $]0; +\infty[$  tels que  $x < y$

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \text{ et } \sqrt{x} < \sqrt{y} \\ &\Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \text{ et } -\sqrt{x} > -\sqrt{y} \\ &\Rightarrow \frac{1}{x} - \sqrt{x} > \frac{1}{y} - \sqrt{y} \\ &\Rightarrow \frac{1}{x} - \sqrt{x} + 1 > \frac{1}{y} - \sqrt{y} + 1 \\ &\Rightarrow f(x) > f(y) \end{aligned}$$

$f$  est strictement décroissante sur  $I$  si et seulement si  $(\forall (x; y) \in I^2);$   
 $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Donc:  $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

D'où  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]0; +\infty[$

3. a. On a l'équation  $\frac{1}{x} + 1 = \sqrt{x}$  est équivalente à  $f(x) = 0$

On a:  $x \mapsto \frac{1}{x} + 1$  est continue sur l'intervalle  $]0; +\infty[$



et  $x \mapsto -\sqrt{x}$  est continue sur l'intervalle  $]0; +\infty[$

Donc  $f: x \mapsto \frac{1}{x} + 1 - \sqrt{x}$  est continue sur l'intervalle  $]0; +\infty[$

Et puisque  $f$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$

Donc  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  tel que

$$J = f(]0; +\infty[)$$

$$= ]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)[$$

$$= ]-\infty; +\infty[$$

Donc  $(\forall y \in J)(\exists x \in I); f(x) = y$

On prend  $y = 0$

Donc  $(\exists x \in I); f(x) = 0$

Autrement dit, l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]0; +\infty[$

Et on a  $f(2) = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$   
et  $f(3) = \frac{4}{3} - \sqrt{3}$

$$f(2) > 0$$

$$f(3) < 0$$

Donc  $f(2) \times f(3) < 0$

Donc, d'après T.V.I l'équation  $f(x) = 0$

admet une solution unique

$\alpha$  tel que :  $2 < \alpha < 3$

b. Déterminons un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0,5

On a  $\alpha \in ]2; 3[$

L'amplitude de l'intervalle  $]2; 3[$  est :  $3 - 2 = 1$

Le centre de l'intervalle  $]2; 3[$  est :  $\frac{2+3}{2} = 2,5$

On a :  $f(2,5) = \frac{1}{2,5} + 1 - \sqrt{2,5} = \frac{7}{5} - \sqrt{2,5}$

Si  $g$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$   
Alors,  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  $g(I)$

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur  $I$ , alors :

$$(\forall y \in f(I))(\exists x \in I); f(x) = y$$

Si  $f$  est continue sur un intervalle fermé  $[a; b]$  avec  $f(a) \times f(b) < 0$   
Alors, il existe  $\alpha \in ]a; b[$  tel que  $f(\alpha) = 0$

x	2	$\alpha$	3
f(x)	$\frac{3}{2} - \sqrt{2} > 0$	$\circ$	$\frac{4}{3} - \sqrt{3} < 0$

$\alpha \in ]a; b[ \Rightarrow \alpha \neq a$  et  $\alpha \neq b$   
car  $f(a) \neq 0$  et  $f(b) \neq 0$ , mais  $f(\alpha) = 0$

x	2	$\alpha$	3
f(x)	$\oplus$	$\circ$	$\ominus$

Donc  $f(2,5) < 0$

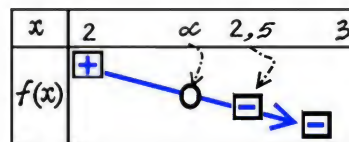
Et puisque  $f(2) > 0$

Alors  $f(2) \times f(2,5) < 0$

Donc :  $\alpha \in ]2; 2,5[$

🖋 L'amplitude de l'intervalle  $]2; 2,5[$

D'où :  $\alpha \in ]2; 2,5[$



## EXERCICE 24

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 2x + \sqrt{x} - 1$$

Et soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. Étudier les variations de  $f$

2. a. Montrer que la courbe  $(C_f)$  coupe l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse  $\alpha$  tel que :  $0 < \alpha < 1$

b. Vérifier que :  $\sqrt{\alpha} = 1 - 2\alpha$

c. Montrer que :  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

3. a. Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  dont on déterminera.

b. Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$

## CORRECTION

1. 🖋 Calculons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sqrt{x} - 1 = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - 1 = +\infty \end{cases}$$

Il suffit de remplacer  $x$  par  $+\infty$  ou bien factoriser par  $x$  (Le plus puissant)



## La monotonie de $f$

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $[0; +\infty[$  tels que  $x < y$

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow 2x < 2y \text{ et } \sqrt{x} < \sqrt{y} \\ &\Rightarrow 2x + \sqrt{x} < 2y + \sqrt{y} - 1 \\ &\Rightarrow 2x + \sqrt{x} - 1 < 2y + \sqrt{y} - 1 \\ &\Rightarrow f(x) < f(y) \end{aligned}$$

$f$  est strictement croissante sur  $I$  si et seulement si  $(\forall (x; y) \in I^2);$   
 $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Donc  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[0; +\infty[$

2)  $\sim$   $\alpha \sim$

On a :  $x \mapsto 2x - 1$  est continue sur l'intervalle  $[0; 1]$

Et on a :  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur l'intervalle  $[0; 1]$

Cette question est juste une interprétation géométrique de la question  
 Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique sur l'intervalle  $]0; 1[$

Donc  $f : x \mapsto 2x + \sqrt{x} - 1$  est continue sur l'intervalle  $[0; 1]$

$$\text{Et : } \begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } f(0) \times f(1) < 0$$

Et puisque  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; 1]$

Donc, d'après T.V.I l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique

$$\alpha \text{ tel que : } 0 < \alpha < 1$$

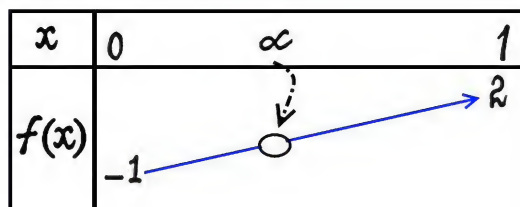
Et par suite :  $(C_f)$  coupe l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse  $\alpha$  tel que  $0 < \alpha < 1$

$\hookrightarrow$  Vérifions que :  $\sqrt{\alpha} = 1 - 2\alpha$

On a  $\alpha$  est la solution de l'équation :  $f(x) = 0$

$$\text{Donc : } f(\alpha) = 0$$

Si  $f$  est continue sur un intervalle fermé  $[a; b]$  avec  $f(a) \times f(b) < 0$  Alors, il existe  $\alpha \in ]a; b[$  tel que  $f(\alpha) = 0$



$$f(\alpha) = 0 \iff 2\alpha + \sqrt{\alpha} - 1 = 0$$

$$\iff \sqrt{\alpha} = 1 - 2\alpha$$

D'où:  $\boxed{\sqrt{\alpha} = 1 - 2\alpha}$

$c_n$  Montrons que  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

On a:  $\sqrt{\alpha} > 0$  et  $\sqrt{\alpha} = 1 - 2\alpha$

Donc:  $1 - 2\alpha > 0$

Donc:  $-2\alpha > -1$

Donc:  $\alpha < \frac{1}{2}$

D'où:  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

Il suffit de déterminer  $\sqrt{\alpha}$  en fonction de  $\alpha$  à partir de  $f(\alpha) = 0$



$3_n$  Montrons que  $f$  admet une fonction réciproque.

On a:  $x \mapsto 2x - 1$  est continue sur  $[0; +\infty[$

Comme étant un polynôme.

Et:  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur  $[0; +\infty[$  *Propriété*

Donc  $f$  est continue sur  $[0; +\infty[$

Comme étant somme de deux fonctions continues

Et puisque  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[0; +\infty[$

Alors  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  tel que:  $J = f(I)$

$$J = f([0; +\infty[)$$

$$= [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$$

$$= [-1; +\infty[$$

$b_n$  Déterminons  $f^{-1}(x)$

Si  $g$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  Alors,  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  $g(I)$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

Soit  $x \in J$ , on cherche  $y \in I$  tel que  $f(y) = x$



$$\begin{aligned}
 f(y) = x &\Leftrightarrow 2y + \sqrt{y} - 1 = x \\
 &\Leftrightarrow 2y + \sqrt{y} = x + 1 \\
 &\Leftrightarrow 2\left(y + \frac{1}{2}\sqrt{y}\right) = x + 1 \\
 &\Leftrightarrow y + \frac{1}{2}\sqrt{y} = \frac{x+1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y}^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{y} + \frac{1}{16} = \frac{x+1}{2} + \frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y} + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{x+9}{16} \quad \left(\text{on a bien } \frac{x+9}{16} \geq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} + \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{x+9}{16}} \quad \text{ou bien} \quad \sqrt{y} + \frac{1}{4} = -\sqrt{\frac{x+9}{16}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{x+9} \quad \text{ou bien} \quad \sqrt{y} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\sqrt{x+9}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{4}\sqrt{x+9} - \frac{1}{4} \quad \text{ou bien} \quad \sqrt{y} = -\frac{1}{4}\sqrt{x+9} - \frac{1}{4}$$

Or  $y \in [0; +\infty[$  et  $x \in [-1; +\infty[$

$$\text{Donc on aura : } \sqrt{y} = \frac{1}{4}\sqrt{x+9} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(\sqrt{x+9} - 1)$$

$$\text{Donc } y = \frac{1}{16}(\sqrt{x+9} - 1)^2$$

$$\text{D'où : } \forall x \in [-1; +\infty[ ; f^{-1}(x) = \frac{1}{16}(\sqrt{x+9} - 1)^2$$

Pour déterminer  $f^{-1}(x)$   
On prend  $x \in J$  et on  
cherche l'unique  $y \in I$   
tel que  $f(y) = x$

### EXERCICE 25

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = x + \sqrt{x-2}$

1. a. Déterminer  $D_f$  le domaine de définition de  $f$ , puis  
calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b. Étudier la continuité de  $f$  sur  $D_f$

2. Étudier la monotonie de  $f$  sur  $D_f$

3. a. Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$   
définie sur un intervalle  $J$  dont on déterminera.

b. Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$

### CORRECTION

### 1) a) Déterminons $D_f$

$$x \in D_f \iff x-2 \geq 0 \\ \iff x \geq 2$$

Donc  $D_f = [2; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x-2}$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-2} = +\infty \end{cases}$$



$$\sqrt[n]{u(x)} \text{ ----- } \rightarrow u(x) \geq 0$$

Il suffit de remplacer  
x par  $+\infty$  ou bien  
factoriser par x  
(Le plus puissant)

### b) La continuité de f sur $D_f$

On a:  $x \mapsto x-2$  est continue sur  $D_f$   
et  $(\forall x \in D_f); x-2 \geq 0$

Donc:  $x \mapsto \sqrt{x-2}$  est continue sur  $D_f$

Et:  $x \mapsto x$  est continue sur  $D_f$

D'où: f est continue sur  $D_f$

Si u est une fonction  
continue sur l'intervalle I  
Et  $(\forall x \in I); u(x) \geq 0$   
Alors:  $x \mapsto \sqrt{u(x)}$   
est continue sur I

### 2) La monotonie de f sur $D_f$

Soient x et y deux éléments de  $D_f$  tels que  $x < y$

$$\begin{aligned} x < y &\implies x-2 < y-2 \text{ et } x < y \\ &\implies \sqrt{x-2} < \sqrt{y-2} \text{ et } x < y \\ &\implies x + \sqrt{x-2} < y + \sqrt{y-2} \\ &\implies f(x) < f(y) \end{aligned}$$

D'où f est strictement croissante sur  $D_f$

f est strictement  
croissante sur I  
si et seulement si  
 $(\forall (x; y) \in I^2);$

$$x < y \implies f(x) < f(y)$$

### 3) a) On a f est continue sur $D_f$ et strictement croissante sur $D_f$

Donc f admet une fonction  
réciproque  $f^{-1}$  définie sur  
un intervalle J tel que:  
 $J = f(I)$

Si g est une fonction  
continue et strictement  
monotone sur un intervalle I  
Alors, g admet une fonction  
réciproque  $g^{-1}$  définie sur  
l'intervalle  $g(I)$



$$\begin{aligned}
 J &= f([2; +\infty[) \\
 &= [f(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[ \\
 &= [2; +\infty[
 \end{aligned}$$

b. Déterminons  $f^{-1}(x)$

Soit  $x \in J$ , on cherche  $y \in I$   
tel que  $f(y) = x$

$$\begin{aligned}
 f(y) = x &\iff y + \sqrt{y-2} = x \\
 &\iff y-2 + \sqrt{y-2} + \frac{1}{4} = x-2 + \frac{1}{4} \\
 &\iff \left(\sqrt{y-2} + \frac{1}{2}\right)^2 = x - \frac{7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\iff \sqrt{y-2} + \frac{1}{2} = \sqrt{x - \frac{7}{4}} \text{ ou bien } \sqrt{y-2} + \frac{1}{2} = -\sqrt{x - \frac{7}{4}}$$

$$\iff \sqrt{y-2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{7}{4}} \text{ ou bien } \sqrt{y-2} = -\frac{1}{2} - \sqrt{x - \frac{7}{4}}$$

on a  $y \in [2; +\infty[ \Rightarrow \sqrt{y-2} \in [0; +\infty[$  et  $\sqrt{x - \frac{7}{4}} \geq \frac{1}{2}$  car  $x \geq 2$

$$\text{Donc on aura: } \sqrt{y-2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{7}{4}}$$

$$\text{Donc: } y-2 = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{7}{4}}\right)^2$$

$$\text{Donc: } y = 2 + \left(\sqrt{x - \frac{7}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{D'où: } \forall x \in [-1; +\infty[; f^{-1}(x) = 2 + \left(\sqrt{x - \frac{7}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2$$

Il suffit d'appliquer  
l'image d'un  
intervalle par une  
fonction continue  
et strictement croissante

Pour déterminer  $f^{-1}(x)$   
On prend  $x \in J$  et on  
cherche l'unique  $y \in I$   
tel que  $f(y) = x$

## EXERCICE 26

Soit  $f$  la fonction définie par:  $f(x) = (\sqrt{x+1}-1)^3$

1. a. Déterminer  $D_f$  le domaine de définition de  $f$ , puis  
calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b. Étudier la continuité de  $f$  sur  $D_f$

2. Étudier la monotonie de  $f$  sur  $D_f$

3. a. Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  dont on déterminera.

b. Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$

### CORRECTION

1. a. Déterminons  $D_f$

$$x \in D_f \iff x+1 \geq 0$$

$$\iff x \geq -1$$

$$\text{Donc } D_f = [-1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1}-1)^3 = +\infty$$



$$\sqrt[n]{u(x)} \text{ ----- } \rightarrow u(x) \geq 0$$

Il suffit de remplacer.

b. La continuité de  $f$  sur  $D_f$

On a :  $x \mapsto x+1$  est continue sur  $D_f$

et  $(\forall x \in D_f); x+1 \geq 0$

Donc :  $x \mapsto \sqrt{x+1}$  est continue sur  $D_f$

et :  $x \mapsto -1$  est continue sur  $D_f$

Donc :  $x \mapsto (\sqrt{x+1}-1)$  est continue sur  $D_f$

D'où :  $f$  est continue sur  $D_f$  Composée de deux fonctions

Si  $u$  est une fonction continue sur l'intervalle  $I$   
Et  $(\forall x \in I); u(x) \geq 0$   
Alors :  $x \mapsto \sqrt{u(x)}$   
est continue sur  $I$

2. La monotonie de  $f$  sur  $D_f$

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $D_f$  tels que  $x < y$

$$x < y \implies x+1 < y+1$$

$$\implies \sqrt{x+1} < \sqrt{y+1}$$

$$\implies \sqrt{x+1}-1 < \sqrt{y+1}-1$$

$$\implies (\sqrt{x+1}-1)^3 < (\sqrt{y+1}-1)^3$$

$$\implies f(x) < f(y)$$

D'où  $f$  est strictement croissante sur  $D_f$

$$\text{Si } a \leq b \text{ Alors } a^{2n+1} \leq b^{2n+1}$$

$f$  est strictement croissante sur  $I$   
si et seulement si  
 $(\forall (x; y) \in I^2);$

$$x < y \implies f(x) < f(y)$$



3) On a  $f$  est continue sur  $D_f$   
et strictement croissante sur  $D_f$

Donc  $f$  admet une fonction  
réciproque  $f^{-1}$  définie sur  
un intervalle  $J$  tel que:

$$J = f(I)$$

$$J = f([-1; +\infty[)$$

$$= [f(-1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$$

$$= [-1; +\infty[$$

b) Déterminons  $f^{-1}(x)$

Soit  $x \in J$ , on cherche  $y \in I$   
tel que  $f(y) = x$

**1<sup>er</sup> cas**: Si  $x \in [0; +\infty[$

$$f(y) = x \iff (\sqrt[3]{y+1} - 1)^3 = x$$

$$\iff \sqrt[3]{y+1} - 1 = \sqrt[3]{x}$$

$$\iff \sqrt[3]{y+1} = \sqrt[3]{x} + 1$$

$$\iff y+1 = (\sqrt[3]{x} + 1)^3$$

$$\iff y = (\sqrt[3]{x} + 1)^3 - 1$$

$$\iff y = \sqrt[3]{x}^3 + 3\sqrt[3]{x}^2 + 3\sqrt[3]{x} + 1 - 1$$

$$\iff y = \sqrt[3]{x}^3 + 3\sqrt[3]{x}^2$$

Donc;

$$\forall x \in [0; +\infty[; f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}^3 + 3\sqrt[3]{x}^2$$

**2<sup>ème</sup> cas**: Si  $x \in [-1; 0]$

Si  $g$  est une fonction  
continue et strictement  
monotone sur un intervalle  $I$   
Alors,  $g$  admet une fonction  
réciproque  $g^{-1}$  définie sur  
l'intervalle  $g(I)$

Il suffit d'appliquer  
l'image d'un  
intervalle par une  
fonction continue  
et strictement croissante

Pour déterminer  $f^{-1}(x)$   
On prend  $x \in J$  et on  
cherche l'unique  $y \in I$   
tel que  $f(y) = x$

Ici, on a  $x \in [-1; +\infty[$   
Donc  $x$  peut être positif  
ou négatif  
Si  $x < 0$ , on a pas le droit  
d'écrire  $\sqrt[3]{x}$

Donc, il faut discuter les  
deux cas suivants:

$$x \in [0; +\infty[$$

$$x \in [-1; 0]$$

$$\begin{aligned}
 f(y) = x &\Leftrightarrow (\sqrt{y+1} - 1)^3 = x \\
 &\Leftrightarrow -(\sqrt{y+1} - 1)^3 = -x \\
 &\Leftrightarrow (1 - \sqrt{y+1})^3 = -x \\
 &\Leftrightarrow 1 - \sqrt{y+1} = \sqrt[3]{-x} \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{y+1} = 1 - \sqrt[3]{-x} \\
 &\Leftrightarrow y+1 = (1 - \sqrt[3]{-x})^2 \\
 &\Leftrightarrow y = (1 - \sqrt[3]{-x})^2 - 1 \\
 &\Leftrightarrow y = 1 - 2\sqrt[3]{-x} + \sqrt[3]{-x}^2 - 1 \\
 &\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{-x}^2 - 2\sqrt[3]{-x} \\
 &\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{-x}
 \end{aligned}$$

Ici  $x < 0$ , on multiplie  
 les deux membre par  $-1$   
 et on aura  $-x > 0$   
 et:  $-(a-b)^3 = (b-a)^3$   
 Et on cherche  $y$  en  
 fonction de  $x$   
 car  $y = f^{-1}(x)$

Donc;  $\forall x \in [-1; 0]; f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{-x}$

D'où  $f^{-1}$  est définie par:

$$\forall x \in [-1; 0]; f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{-x}$$

$$\forall x \in [0; +\infty[; f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x}$$

### EXERCICE 27

Soit  $f$  la fonction définie par:  $f(x) = \frac{3x-1}{1-x}$

1. a. Déterminer  $D_f$  le domaine de définition de  $f$ .

b. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$

2. a. Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in D_f$

b. Dresser le tableau de variations de  $f$ .

3. Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I = ]0; 1]$

a. Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  dont on déterminera.

b. Calculer  $g(2)$  et en déduire  $g^{-1}(-5)$

c. Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$



# 1 ~ a ~ Déterminons $D_f$

$$x \in D_f \iff 1-x \neq 0$$

$$\iff x \neq 1$$

$$\text{Donc: } D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$= ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

## 6 ~ Calcul des limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{1-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{-x}$$

$$= -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{1-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{-x}$$

$$= -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x-1}{1-x}$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-1}{1-x}$$

$$= +\infty$$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$1-x$	$+$	$\circ$	$-$

$$\frac{u(x)}{v(x)} \xrightarrow{\quad} v(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} = \infty \quad n > m$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_m x^{m-n}} = 0 \quad m > n$$

$$= \frac{a_n}{b_m} \quad m = n$$

Si on remplace, on va trouver  $\frac{2}{0} = \infty$ , il faut donc déterminer le signe de  $1-x$

$\frac{2}{0^+} = +\infty$  et  $\frac{2}{0^-} = -\infty$

# 2 ~ a ~ Calculons $f'(x)$

On a  $f$  est dérivable sur  $D_f$  ~ Fraction rationnelle ~ Soit  $x \in D_f$

$$f'(x) = \left( \frac{3x-1}{1-x} \right)'$$

$$= \frac{(3x-1)'(1-x) - (1-x)'(3x-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{3(1-x) - (-1)(3x-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{3-3x+3x-1}{(1-x)^2}$$

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - u.v'}{v^2}$$

$$a' = 0 \quad (ax)' = a$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(a x^n)' = a n x^{n-1}$$

D'où :  $(\forall x \in \mathcal{D}_f); f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$

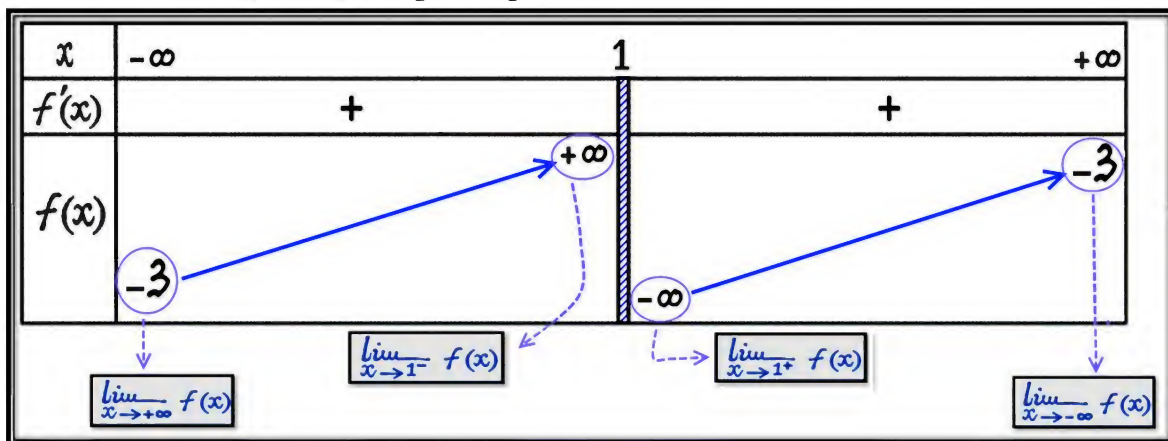
En Le tableau de variations de  $f$ .

On a :  $(\forall x \in \mathcal{D}_f); f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$

Or  $(\forall x \in \mathcal{D}_f); (1-x)^2 > 0$  et  $2 > 0$

Donc :  $(\forall x \in \mathcal{D}_f); f'(x) > 0$

D'où  $f$  est strictement croissante sur les deux intervalles  $]-\infty; 1[$  et  $]1; +\infty[$



3. On Soit  $g(x) = f(x)$ ; pour tout  $x \in ]1; +\infty[$

On a  $g$  est continue sur

l'intervalle  $I = ]1; +\infty[$

Et  $g$  est strictement

croissante sur  $I$

Donc  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur

un intervalle  $J$  tel que

$$J = g(I)$$

$$J = g(]1; +\infty[)$$

$$= ]\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[$$

$$= ]-\infty; -3[$$

Si  $g$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  Alors,  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  $g(I)$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante



b. Calculons  $g(2)$  et  $g^{-1}(-5)$



$$g(2) = \frac{3 \times 2 - 1}{1 - 2} = -5$$

On a :  $g(2) = -5$

Donc :  $g^{-1}(-5) = 2$

Si  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$ , alors :

$$g(x) = y \Leftrightarrow g^{-1}(y) = x$$

c. Déterminons  $g^{-1}(x)$

Soit  $x \in J$ , on cherche  $y \in I$  tel que  $g(y) = x$

$$g(y) = x \Leftrightarrow \frac{3y-1}{1-y} = x$$

$$\Leftrightarrow 3y-1 = x(1-y)$$

$$\Leftrightarrow 3y-1 = x - xy$$

$$\Leftrightarrow 3y + xy = x + 1$$

$$\Leftrightarrow y(3+x) = x+1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x+1}{3+x} \quad (3+x \neq 0 \text{ car } x < -3)$$

Pour déterminer  $g^{-1}(x)$

On prend  $x \in J$  et on cherche l'unique  $y \in I$  tel que  $g(y) = x$

D'où :  $\forall x \in ]-\infty; -3[ ; g^{-1}(x) = \frac{x+1}{3+x}$

## EXERCICE 28

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \sqrt{\sqrt{1+x^2} + x}$

1. a. Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x + \sqrt{1+x^2} > 0$

b. En déduire que  $D_f = \mathbb{R}$

2. Étudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

3. Étudier la monotonie de  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  et calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

4. Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I = [0; +\infty[$

a. Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  dont on déterminera.

b. Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$

## CORRECTION

① ~ Montrons que :  $(\forall x \in \mathbb{R}); x + \sqrt{1+x^2} > 0$

1<sup>er</sup> Cas Si :  $x \in [0; +\infty[$

$$\begin{aligned} x \geq 0 &\Rightarrow x^2 \geq 0 \text{ et } x \geq 0 \\ &\Rightarrow 1+x^2 \geq 1 \text{ et } x \geq 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{1+x^2} \geq 1 \text{ et } x \geq 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{1+x^2} + x \geq 1 \\ &\Rightarrow \sqrt{1+x^2} + x > 0 \quad (\text{Car } 1 > 0) \end{aligned}$$

D'où :  $(\forall x \in [0; +\infty[); x + \sqrt{1+x^2} > 0$

2<sup>ème</sup> Cas Si :  $x \in ]-\infty; 0[$

On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^2} + x &= \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)(\sqrt{1+x^2} - x)}{\sqrt{1+x^2} - x} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2} - x} \\ &= \frac{1+x^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2} - x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} \end{aligned}$$

Et puisque :  $x < 0$

Alors :  $\sqrt{1+x^2} > 0$  et  $-x > 0$

Donc :  $\sqrt{1+x^2} - x > 0$

Donc :  $(\forall x \in ]-\infty; 0[); x + \sqrt{1+x^2} > 0$

Conclusion

$$(\forall x \in \mathbb{R}); x + \sqrt{1+x^2} > 0$$

En Déduisons que :  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

On a :  $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow 1+x^2 \geq 0 \text{ et } \sqrt{1+x^2} + x \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq -1 \text{ et } \sqrt{1+x^2} + x \geq 0$$

Si  $x < 0$

Alors  $\sqrt{1+x^2} > 0$  et  $x < 0$

Donc, on peut pas déduire le signe de  $\sqrt{1+x^2} + x$

Dans ce cas, ça sera mieux de multiplier par le conjugué.

D'une part pour lever la racine et d'autre pour avoir  $\sqrt{1+x^2} - x$  qui est strictement positif

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ  
وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا  
رَبَّيْنِي صَغِيرًا



Et puisque :  $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq -1$

Et d'après la question précédente, on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); \sqrt{1+x^2} + x \geq 0$$

$$\text{D'où : } \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

2. La continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

On a :  $x \mapsto 1+x^2$  est continue sur  $\mathbb{R}$  *polynôme*

$$\text{et } (\forall x \in \mathbb{R}); \sqrt{1+x^2} \geq 0$$

Donc :  $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Et puisque :  $x \mapsto x$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Alors :  $x \mapsto \sqrt{1+x^2} + x$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Si  $u$  est une fonction continue sur l'intervalle  $I$   
Et  $(\forall x \in I); u(x) \geq 0$   
Alors :  $x \mapsto \sqrt{u(x)}$  est continue sur  $I$

$$\text{Et comme : } (\forall x \in \mathbb{R}); \sqrt{1+x^2} + x \geq 0$$

Alors :  $f : x \mapsto \sqrt{\sqrt{1+x^2} + x}$  est continue sur  $\mathbb{R}$

3. Étudions la monotonie de  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $[0; +\infty[$  tels que  $x < y$

$$x < y \Rightarrow x^2 < y^2 \text{ et } x < y$$

$$\Rightarrow 1+x^2 < 1+y^2 \text{ et } x < y$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} < \sqrt{1+y^2} \text{ et } x < y$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} + x < \sqrt{1+y^2} + y$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sqrt{1+x^2} + x} < \sqrt{\sqrt{1+y^2} + y}$$

$$\Rightarrow f(x) < f(y)$$

Donc  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$

 Calculons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\sqrt{1+x^2} + x} = +\infty$$

*Il suffit de remplacer.*

4. a. Soit  $g(x) = f(x)$ ; pour tout  $x \in [0; +\infty[$

On a  $g$  est continue sur  $I = [0; +\infty[$

Et  $g$  est strictement croissante sur  $I$

 Si  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$   
Alors :

$$x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$$

$f$  est strictement croissante sur  $I$   
si et seulement si  
 $(\forall (x; y) \in I^2);$

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Donc  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  tel que :

$$J = g(I)$$

$$J = g([0; +\infty[)$$

$$= [g(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$$

$$= [1; +\infty[$$

6. Déterminons  $g^{-1}(x)$

Soit  $x \in J$ , on cherche  $y \in I$  tel que  $g(y) = x$

$$g(y) = x \iff \sqrt{1+y^2} + y = x^2$$

$$\iff \sqrt{1+y^2} = x^2 - y$$

$$\iff \sqrt{1+y^2} = x^2 - y$$

$$\iff 1+y^2 = (x^2 - y)^2$$

$$\iff 1+y^2 = x^4 - 2x^2y + y^2$$

$$\iff 2x^2y = x^4 - 1$$

$$\iff y = \frac{x^4 - 1}{2x^2} \quad (2x^2 \neq 0 \text{ car } x \in J)$$

D'où :  $\forall x \in [1; +\infty[; g^{-1}(x) = \frac{x^4 - 1}{2x^2}$

### EXERCICE 29

1. Montrer que l'équation  $x^2 - \frac{3}{x} = 2$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]1; 2[$

2. a. Montrer que :  $\alpha = \sqrt[3]{2\alpha + 3}$

b. Montrer que :  $\sqrt[3]{5} < \alpha < \sqrt[3]{7}$

### CORRECTION

Si  $g$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  Alors,  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  $g(I)$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

Pour déterminer  $g^{-1}(x)$  On prend  $x \in J$  et on cherche l'unique  $y \in I$  tel que  $g(y) = x$



1. On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[1; 2]$

par :  $f(x) = x^2 - \frac{3}{x}$

On va montrer que l'équation

$f(x) = 2$  admet une solution

unique tel que  $\alpha \in ]1; 2[$

On a :  $x \mapsto x^2$  est continue sur l'intervalle  $[1; 2]$

Et :  $x \mapsto -\frac{3}{x}$  est continue sur  $[1; 2]$

Fonction rationnelle

Donc :  $f : x \mapsto x^2 - \frac{3}{x}$  est continue sur  $[1; 2]$

Comme étant somme de deux fonctions continues

$$\text{Et : } \begin{cases} f(1) = 1^2 - \frac{3}{1} = -2 \\ f(2) = 2^2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } f(1) < 2 < f(2)$$

D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaire, l'équation  $f(x) = 2$  admet au moins une solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $]1; 2[$

✎ Pour prouver que  $\alpha$  est unique, il suffit de montrer que la fonction  $f$  est strictement monotone sur  $[1; 2]$

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $[1; 2]$  tels que  $x < y$

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow x^2 < y^2 \text{ et } \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \\ &\Rightarrow x^2 < y^2 \text{ et } \frac{3}{x} > \frac{3}{y} \\ &\Rightarrow x^2 < y^2 \text{ et } -\frac{3}{x} < -\frac{3}{y} \\ &\Rightarrow x^2 - \frac{3}{x} < y^2 - \frac{3}{y} \\ &\Rightarrow x^2 - \frac{3}{x} - 2 < y^2 - \frac{3}{y} - 2 \\ &\Rightarrow f(x) < f(y) \end{aligned}$$

🔍 Pourquoi peut-on utiliser la définition?

Car :  $x > 0$

👉 Donc le carré va conserver le symbole <

👉  $\frac{3}{x}$  va changer le symbole <

👉  $-\frac{3}{x}$  va le rendre <

$f$  est strictement croissante sur  $I$  si et seulement si  $(\forall (x; y) \in I^2);$

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Donc  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[1;2]$

Et par suite  $\alpha$  est unique

2.  $\alpha$  Montrons que :  $\alpha = \sqrt[3]{2\alpha+3}$

$$\begin{aligned}\alpha = \sqrt[3]{2\alpha+3} &\iff \alpha^3 = 2\alpha+3 \\ &\iff \alpha^3 - 3 = 2\alpha \\ &\iff \frac{\alpha^3 - 3}{\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha} \quad \alpha \neq 0 \\ &\iff \frac{\alpha^3}{\alpha} - \frac{3}{\alpha} = 2 \\ &\iff \alpha^2 - \frac{3}{\alpha} = 2 \\ &\iff f(\alpha) = 2\end{aligned}$$

Ici, pour déterminer  $\alpha$  en fonction de  $\alpha$  on essaie de commencer par le résultat demandé  $\alpha = \sqrt[3]{2\alpha+3}$  et on transforme pour la rendre sous forme  $f(\alpha) = 2$

Et puisque  $f(\alpha) = 2$  est une proposition vraie

Alors  $\alpha = \sqrt[3]{2\alpha+3}$

6. Montrons que :  $\sqrt[3]{5} < \alpha < \sqrt[3]{7}$

On a  $1 < \alpha < 2$  et  $\alpha = \sqrt[3]{2\alpha+3}$

$$\begin{aligned}1 < \alpha < 2 &\iff 2 < 2\alpha < 4 \\ &\iff 5 < 2\alpha+3 < 7 \\ &\iff \sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{2\alpha+3} < \sqrt[3]{7} \\ &\iff \sqrt[3]{5} < \alpha < \sqrt[3]{7}\end{aligned}$$

D'où :  $\sqrt[3]{5} < \alpha < \sqrt[3]{7}$

Il suffit d'encadrer  $\sqrt[3]{2\alpha+3}$  avec  $1 < \alpha < 2$

### EXERCICE 30

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^-$  par :  $f(x) = \frac{x^2+2}{2x^2+1}$

1.  $\alpha$  Calculer  $f'(x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^-$

6. En déduire la monotonie de  $f$  sur  $\mathbb{R}^-$

2. Montrer que l'équation  $f(x) = \sqrt{2}$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}[$

3.  $\alpha$  Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on précisera



6<sub>n</sub> Montrer que:  $f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{2-x}{2x-1}}$ , pour tout  $x \in J$

4<sub>n</sub> Montrer que:  $\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} < \frac{2}{3}$

### CORRECTION

1<sub>n</sub> ou Calculons  $f'(x)$

On a  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^-$

Fonction rationnelle.

Soit  $x \in \mathbb{R}^-$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{x^2+2}{2x^2+1} \right)' \\ &= \frac{(x^2+2)'(2x^2+1) - (2x^2+1)'(x^2+2)}{(2x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x(2x^2+1) - 4x(x^2+2)}{(2x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^3+2x - 4x^3-8x}{(2x^2+1)^2} \\ &= \frac{-6x}{(2x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$a' = 0 \quad (ax)' = a$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(ax^n)' = a n x^{n-1}$$

D'où :  $(\forall x \in \mathbb{R}^-); f'(x) = \frac{-6x}{(2x^2+1)^2}$

6<sub>n</sub> La monotonie de  $f$  sur  $\mathbb{R}^-$

On a :  $(\forall x \in \mathbb{R}^-); f'(x) = \frac{-6x}{(2x^2+1)^2}$

Or  $(\forall x \in \mathbb{R}^-); (2x^2+1)^2 > 0$

$(2x^2+1)^2$  est strictement positif

Donc le signe de  $f'(x)$  dépend du signe de  $-6x$

Et puisque :  $x \leq 0$

Alors :  $-6x \leq 0$

Donc :  $(\forall x \in \mathbb{R}^-); f'(x) \leq 0$

D'où  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^-$

2. Montrons que l'équation  $f(x) = \sqrt{2}$  admet une solution unique  $\alpha$  tel que  $\alpha \in ]-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}[$

On a  $f$  est continue sur l'intervalle  $[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}]$

Comme étant fonction rationnelle

$$\text{Et: } \begin{cases} f(-\frac{2}{3}) = \frac{(-\frac{2}{3})^2 + 1}{2(-\frac{2}{3})^2 + 1} = \frac{22}{17} \\ f(-\frac{1}{2}) = \frac{(-\frac{1}{2})^2 + 1}{2(-\frac{1}{2})^2 + 1} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc: } f(-\frac{2}{3}) < \sqrt{2} < f(-\frac{1}{2})$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaire l'équation  $f(x) = \sqrt{2}$  admet au moins une solution  $\alpha$  tel que  $\alpha \in ]-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}[$

Et comme  $f$  est strictement croissante sur  $[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}]$  Alors  $\alpha$  est unique.

3. a.

On a  $f$  est continue sur l'intervalle  $\mathbb{R}^-$

Et  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^-$

Donc  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  tel que

$$\begin{aligned} J &= f(]-\infty; 0]) \\ &= ]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(0)] \\ &= ]\frac{1}{2}; 2] \end{aligned}$$

Si  $g$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  Alors,  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  $g(I)$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$



6~ Déterminons  $f^{-1}(x)$

Soit  $x \in J$ , on cherche  $y \in I$   
tel que  $f(y) = x$

$$f(y) = x \iff \frac{y^2 + 2}{2y^2 + 1} = x$$

$$\iff y^2 + 2 = x(2y^2 + 1)$$

$$\iff y^2 + 2 = 2xy^2 + x$$

$$\iff y^2 - 2xy^2 = x - 2$$

$$\iff y^2(1 - 2x) = x - 2$$

$$\iff y^2 = \frac{x-2}{1-2x} \quad (1-2x \neq 0 \text{ car } x \neq \frac{1}{2})$$

$$\iff y = \sqrt{\frac{x-2}{1-2x}} \text{ ou bien } y = -\sqrt{\frac{x-2}{1-2x}}$$

Or  $y \in \mathbb{R}^-$

$$\text{Donc: } y = -\sqrt{\frac{x-2}{1-2x}} = -\sqrt{\frac{2-x}{2x-1}}$$

$$\text{D'où: } (\forall x \in J); f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{2-x}{2x-1}}$$

4~ Montrons que :  $\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} < \frac{2}{3}$

On  $\alpha$  est la solution de l'équation  $f(x) = \sqrt{2}$

$$\text{Donc: } f(\alpha) = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc: } \alpha &= f^{-1}(\sqrt{2}) \\ &= -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} \end{aligned}$$

Et on sait que:  $-\frac{2}{3} < \alpha < -\frac{1}{2}$

$$\text{Donc: } -\frac{2}{3} < -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} < -\frac{1}{2}$$

$$\text{D'où: } \frac{1}{2} < \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} < \frac{2}{3}$$

Pour déterminer  $f^{-1}(x)$

On prend  $x \in J$  et on  
cherche l'unique  $y \in I$   
tel que  $f(y) = x$

On remplace  $x$  par  $\sqrt{2}$

dans l'expression de  $f^{-1}(x)$

🧐 On cherche un encadrement

Donc, on peut intervenir

le fait que  $\alpha \in ]-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}[$

## EXERCICE 31

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[1;2]$   
tel que  $f(1) = -1$

Montrer qu'il existe au moins un réel  $\alpha$  dans  
l'intervalle  $]1;2[$  tel que :  $(2-\alpha)f(\alpha) = 1-\alpha$

## CORRECTION

On va montrer que l'équation  $(2-x)f(x) = 1-x$  admet  
au moins une solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $]1;2[$

On considère la fonction  $h$  définie sur l'intervalle  $[1;2]$   
par :  $h(x) = (2-x)f(x) - 1 + x$

On a :  $x \mapsto 2-x$  est continue sur l'intervalle  $[1;2]$  Polynôme

Et :  $x \mapsto f(x)$  est continue sur l'intervalle  $[1;2]$  d'après l'énoncé

Donc :  $x \mapsto (2-x)f(x)$  est continue sur l'intervalle  $[1;2]$

Comme étant produit de deux fonctions continues

Et comme :  $x \mapsto -1+x$  est continue sur l'intervalle  $[1;2]$  Polynôme

Alors  $h : x \mapsto (2-x)f(x) - 1 + x$  est continue sur l'intervalle  $[1;2]$

$$\text{Et on a : } \begin{cases} h(1) = (2-1)f(1) - 1 + 1 = f(1) = -1 \\ h(2) = (2-2)f(2) - 1 + 2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } h(1) \times h(2) < 0$$

Donc, d'après le théorème des  
valeurs intermédiaire, il existe au  
moins un réel  $\alpha \in ]1;2[$  tel que  $h(\alpha) = 0$

$$\text{Donc : } \exists \alpha \in ]1;2[ ; (2-\alpha)f(\alpha) - 1 + \alpha = 0$$

$$\text{D'où : } \boxed{\exists \alpha \in ]1;2[ ; (2-\alpha)f(\alpha) = 1-\alpha}$$

Si  $h$  est continue sur  
un intervalle fermé  
 $[a;b]$  avec  $h(a) \times h(b) < 0$   
Alors, il existe  $\alpha \in ]a;b[$   
tel que  $h(\alpha) = 0$



## EXERCICE 32

Soit  $f$  la fonction définie par:  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[3]{x}}$

1. a. Déterminer  $D_f$  le domaine de définition de  $f$

b. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$

2. a. Vérifier que  $f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$  pour tout  $x \in D_f$

b. En déduire la monotonie de  $f$

3. Montrer que :  $\begin{cases} (\forall x \in \mathbb{R}); x - \sqrt{x^2+4} < 0 \\ (\forall x \in \mathbb{R}); x + \sqrt{x^2+4} > 0 \end{cases}$

4. a. Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  dont on déterminera

b. Déterminer le sens de variations de  $f^{-1}$

c. Déterminer  $f^{-1}(x)$ , pour tout  $x \in J$ .

## CORRECTION

1. a. Déterminons  $D_f$

$$x \in D_f \iff x^2 \geq 0 \text{ et } x \geq 0 \text{ et } \sqrt[3]{x} \neq 0$$

$$\iff x \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq 0 \text{ et } x \neq 0$$

$$\iff x > 0$$

$$\text{Donc : } D_f = ]0; +\infty[$$

b. Calcul des limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[3]{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \\ &= +\infty \end{aligned}$$



$$\sqrt[n]{u(x)} \text{ ----- } \rightarrow u(x) \geq 0$$

$$\frac{u(x)}{v(x)} \text{ ----- } \rightarrow v(x) \neq 0$$

Ici, si on remplace  $x$  par  $+\infty$ , on va trouver la forme indéterminée  $\frac{\infty}{\infty}$ . On peut faire la méthode ci-contre, ou bien factoriser le numérateur par  $\sqrt[3]{x}$ .

2. a. Vérifions que :  $f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$  pour tout  $x \in D_f$

Soit  $x \in D_f$

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(x) &= \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{x^2}{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \\ &= \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

D'où :  $f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

6. La monotonie de  $f$  sur  $D_f$

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $]0; +\infty[$  tels que  $x < y$

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y} \\ &\Rightarrow \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y} \text{ et } \frac{1}{\sqrt[3]{x}} > \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \\ &\Rightarrow \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y} \text{ et } -\frac{1}{\sqrt[3]{x}} > -\frac{1}{\sqrt[3]{y}} \\ &\Rightarrow \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} < \sqrt[3]{y} - \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \\ &\Rightarrow f(x) < f(y) \end{aligned}$$

$f$  est strictement croissante sur  $I$  si et seulement si  $(\forall (x; y) \in I^2);$   
 $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $D_f$

3. Montrons que :  $\begin{cases} (\forall x \in \mathbb{R}); x - \sqrt{x^2 + 4} < 0 \\ (\forall x \in \mathbb{R}); x + \sqrt{x^2 + 4} > 0 \end{cases}$

Montrons que :  $(\forall x \in \mathbb{R}); x - \sqrt{x^2 + 4} < 0$

1<sup>er</sup> cas : Si  $x \leq 0$

On a  $x \leq 0$  et  $-\sqrt{x^2 + 4} < 0$

Donc  $x - \sqrt{x^2 + 4} < 0$

Donc  $(\forall x \in \mathbb{R}^-); x - \sqrt{x^2 + 4} < 0$

2<sup>ème</sup> cas : Si  $x \geq 0$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ  
 وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا  
 رَبَّيَانِي صَغِيرًا




$$\begin{aligned}
& x - \sqrt{x^2 + 4} \\
&= \frac{(x - \sqrt{x^2 + 4})(x + \sqrt{x^2 + 4})}{x + \sqrt{x^2 + 4}} \\
&= \frac{x^2 - \sqrt{x^2 + 4}^2}{x + \sqrt{x^2 + 4}} \\
&= \frac{x^2 - (x^2 + 4)}{x + \sqrt{x^2 + 4}} \\
&= \frac{x^2 - x^2 - 4}{x + \sqrt{x^2 + 4}} \\
&= \frac{-4}{x + \sqrt{x^2 + 4}}
\end{aligned}$$

Or :  $-4 < 0$  et  $x + \sqrt{x^2 + 4} > 0$

Donc :  $\frac{-4}{x + \sqrt{x^2 + 4}} < 0$

Donc :  $(\forall x \in \mathbb{R}^+); x - \sqrt{x^2 + 4} < 0$  ①

D'où :  $(\forall x \in \mathbb{R}); x - \sqrt{x^2 + 4} < 0$

 Montrons que  $(\forall x \in \mathbb{R}); x + \sqrt{x^2 + 4} > 0$

1<sup>er</sup> cas : Si  $x \geq 0$

On a :  $x \geq 0$  et  $\sqrt{x^2 + 4} > 0$

Donc :  $x + \sqrt{x^2 + 4} > 0$

Donc :  $(\forall x \in \mathbb{R}^+); x + \sqrt{x^2 + 4} > 0$

2<sup>ème</sup> cas : Si  $x \leq 0$

Alors  $-x \geq 0$

D'après ①, on aura  $-x - \sqrt{(-x)^2 + 4} < 0$

Donc :  $-x - \sqrt{x^2 + 4} < 0$

Donc :  $-(x + \sqrt{x^2 + 4}) < 0$

Donc :  $(\forall x \in \mathbb{R}^-); x + \sqrt{x^2 + 4} > 0$

D'où :  $(\forall x \in \mathbb{R}); x + \sqrt{x^2 + 4} > 0$

Si  $x \geq 0$

Alors  $\sqrt{x^2 + 4} > 0$  et  $x \geq 0$

Donc, on peut pas déduire le signe de  $x - \sqrt{x^2 + 4}$

Dans ce cas, ça sera mieux de multiplier par le conjugué, d'une part pour lever la racine et d'autre part pour avoir  $x + \sqrt{x^2 + 4}$  qui est strictement positif

لَا إِلَهَ إِلَّا أَنْتَ سُبْحَانَكَ إِنِّي كُنْتُ مِنَ الظَّالِمِينَ

**Conclusion** :  $\begin{cases} (\forall x \in \mathbb{R}); x - \sqrt{x^2 + 4} < 0 \\ (\forall x \in \mathbb{R}); x + \sqrt{x^2 + 4} > 0 \end{cases}$

4.  $\alpha_n$

On a  $x \mapsto x^2$  est continue sur  $D_f$

Et :  $(\forall x \in D_f); x^2 \geq 0$

Donc :  $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$  est continue sur  $D_f$

Et comme :  $x \mapsto -1$  est continue sur  $D_f$

Alors  $x \mapsto \sqrt[3]{x^2} - 1$  est continue sur  $D_f$

Et puisque :  $x \mapsto \sqrt[3]{x}$  est continue sur  $D_f$

Et  $(\forall x \in D_f); \sqrt[3]{x} \neq 0$

Alors :  $f : x \mapsto \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x}}$  est continue sur  $D_f$ .

On a  $f$  est continue sur  $]0; +\infty[$

et  $f$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$

Donc  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  tel que

$$J = f(]0; +\infty[)$$

$$= \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$$

$$= ]-\infty; +\infty[$$

6. Le sens de variations de  $f^{-1}$

On sait que  $f$  et  $f^{-1}$  ont le même sens de variations

Et puisque  $f$  est strictement croissante sur  $I = ]0; +\infty[$

Alors  $f^{-1}$  est strictement croissante sur  $J = ]-\infty; +\infty[$

c. Déterminons  $f^{-1}(x)$

Soit  $x \in J$ , on cherche  $y \in D_f$  tel que  $f(y) = x$

$$f(y) = x \iff \frac{\sqrt[3]{y^2} - 1}{\sqrt[3]{y}} = x$$

$$\iff \sqrt[3]{y^2} - 1 = x \sqrt[3]{y}$$

Si  $g$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$   
Alors,  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  $g(I)$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ  
وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا  
رَبَّيْنِي صَغِيرًا



$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y}^2 - x \sqrt[3]{y} - 1 = 0 \quad (E)$$

Soit l'équation  $\sqrt[3]{y}^2 - x \sqrt[3]{y} - 1 = 0$

On pose  $Y = \sqrt[3]{y}$ , avec  $Y \geq 0$

L'équation (E) devient  $Y^2 - xY - 1 = 0$

Soit discriminant

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-x)^2 - 4(1)(-1) \\ &= x^2 + 4 \end{aligned} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-x \\ c=-1 \end{cases}$$

On a :  $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 + 4 > 0$

Puisque  $\Delta > 0$

Alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes

$$Y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \quad \text{et} \quad Y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

Et puisque  $Y \geq 0$

Et d'après le résultat de la question 3

On a  $(\forall x \in \mathbb{R}); x + \sqrt{x^2 + 4} > 0$  et  $(\forall x \in \mathbb{R}); x - \sqrt{x^2 + 4} < 0$

$$\text{Donc } Y = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

$$\text{Donc } \sqrt[3]{y} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

$$\text{Donc } y = \left( \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \right)^3$$

$$\text{D'où : } (\forall x \in \mathbb{R}); f^{-1}(x) = \left( \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \right)^3$$

### EXERCICE 33

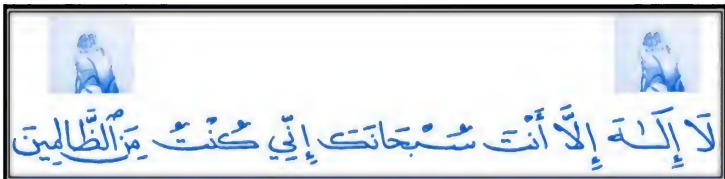
Ici, on a  $\sqrt[3]{y}^2 = \sqrt[3]{y^2}$   
car  $y \in ]0; +\infty[$

Pour déterminer  $y$ ,  
on peut effectuer  
un changement  
de variable

$x$  joue le  
rôle d'un paramètre

Donc, on va  
déterminer  $y$  en  
fonction de  $x$

Après avoir  
déterminé  $Y$   
On le remplace  
par  $\sqrt[3]{y}$   
Et on déduit  $y$



On considère l'équation (E):  $x^3 + 3x - 2 = 0$

### Première partie



### Encadrement d'une solution

1. Justifier que l'équation (E) admet une solution unique  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$
2. Vérifier que :  $\alpha \in ]0; 1[$
3. Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0,5

### Deuxième partie

### Valeur exacte d'une solution par la méthode de Cardon

Soient  $u$  et  $v$  deux réels.

1. Montrer que:  $(u+v)^3 + 3(u+v) - 2 = u^3 + v^3 + 3(uv+1)(u+v) - 2$
2. En déduire que si  $u$  et  $v$  vérifient le système 
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ uv = -1 \end{cases}$$
, alors  $(u+v)$  est solution de (E)
3. Montrer que pour tous réels  $u$  et  $v$  non nuls, on a: 
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ uv = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} (u^3)^2 - 2u^3 - 1 = 0 \\ v = -\frac{1}{u} \end{cases}$$
4. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation (E'):  $x^2 - 2x - 1 = 0$
5. En déduire la valeur exacte de  $\alpha$

### CORRECTION

1. Montrons que l'équation (E) admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par:  $f(x) = x^3 + 3x - 2$

La monotonie de  $f$

Soit  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 + 3x - 2)' \\ &= 3x^2 + 3 \end{aligned}$$

Donc:  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 3x^2 + 3$

Et puisque  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 3x^2 \geq 0$  et  $3 > 0$

$$a' = 0 \quad (ax)' = a$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(ax^n)' = anx^{n-1}$$



Donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

On a  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , car  $f$  est un polynôme et  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

$$\text{Et } f(-\infty; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[ \\ = ]-\infty; +\infty[$$

Et puisque  $0 \in ]$

Alors, l'équation admet une solution unique  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$

2. Vérifions que  $\alpha \in ]0; 1[$

On  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\text{Et } \begin{cases} f(0) = -2 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

Donc  $f(0) \times f(1) < 0$

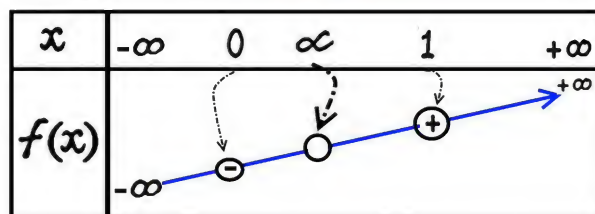
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaire on aura  $\alpha \in ]0; 1[$

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur  $[\alpha; \beta]$ , alors:

$$(\forall y \in f([\alpha; \beta])) (\exists ! x \in [\alpha; \beta]); f(x) = y$$

Si  $f$  est continue sur un intervalle fermé  $[\alpha; \beta]$  avec  $f(\alpha) \times f(\beta) < 0$

Alors, il existe  $\alpha \in ]\alpha; \beta[$  tel que  $f(\alpha) = 0$



3. Déterminons un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0,5.

On a  $\alpha \in ]0; 1[$

🔪 L'amplitude de l'intervalle  $]0; 1[$  est  $1 - 0 = 1$

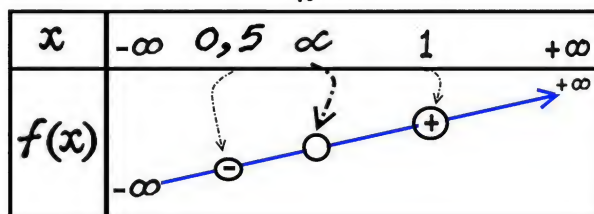
🔪 Le centre de l'intervalle  $]0; 1[$  est  $\frac{0+1}{2} = 0,5$

et  $f(0,5) = -0,375$

Donc  $f(0,5) \times f(1) < 0$

Donc, d'après T.V.I

on aura  $\alpha \in ]0,5; 1[$



### Deuxième partie

1. Montrons que :  $(u+v)^3 + 3(u+v) - 2 = u^3 + v^3 + 3(uv+1)(u+v) - 2$

$$\begin{aligned}
 & (u+v)^3 + 3(u+v) - 2 \\
 &= u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + 3(u+v) - 2 \\
 &= u^3 + v^3 + 3(u+v)(uv+1) - 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 &= a^3 + 3ab(a+b) + b^3
 \end{aligned}$$

$$D'où: (u+v)^3 + 3(u+v) - 2 = u^3 + v^3 + 3(uv+1)(u+v) - 2$$

2. Dédudions que: si  $u$  et  $v$  vérifient le système  $\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ uv = -1 \end{cases}$  alors  $(u+v)$  est solution de (E)

On suppose que:  $\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ uv = -1 \end{cases}$

Et on montre que  $(u+v)$  est solution de (E)

On a  $u^3 + v^3 = 2$  et  $uv = -1$

Donc

$$u^3 + v^3 + 3(uv+1)(u+v) - 2 = 2 + 3(-1+1)(u+v) - 2 = 0$$

Et comme  $(u+v)^3 + 3(u+v) - 2 = u^3 + v^3 + 3(uv+1)(u+v) - 2$

Alors  $(u+v)^3 + 3(u+v) - 2 = 0$

Et par suite  $(u+v)$  est solution de (E)

D'où  $\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ uv = -1 \end{cases} \Rightarrow (u+v)$  est solution de (E)

3. Soient  $u$  et  $v$  deux réels non nuls

$$\text{Montrons que: } \begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ uv = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u^3)^2 - 2u^3 - 1 = 0 \\ v = -\frac{1}{u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ uv = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + \left(-\frac{1}{u}\right)^3 = 2 \\ v = -\frac{1}{u} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - \frac{1}{u^3} = 2 \\ v = -\frac{1}{u} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u^6 - 1}{u^3} = 2 \\ v = -\frac{1}{u} \end{cases}$$

On remplace  $v$  par  $-\frac{1}{u}$  dans la première équation du système

$$\frac{a}{b} = c \Rightarrow a = bc$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^6 - 1 = 2u^3 \\ v = -\frac{1}{u} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^6 - 2u^3 - 1 = 0 \\ v = -\frac{1}{u} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u^3)^2 - 2u^3 - 1 = 0 \\ v = -\frac{1}{u} \end{cases}$$

كلمتان خفيفتان على اللسان،  
ثقلتان في الميزان:  
سُبْحَانَ اللَّهِ وَبِحَمْدِهِ  
سُبْحَانَ اللَّهِ الْعَظِيمِ

D'où  $\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ uv = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u^3)^2 - 2u^3 - 1 = 0 \\ v = -\frac{1}{u} \end{cases}$

4. Considérons l'équation (E'):  $x^2 - 2x - 1 = 0$

Son discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-1) = 8$

Et puisque  $\Delta > 0$

Alors l'équation (E') admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

Donc  $S = \{1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\}$

5. La valeur exacte de  $\alpha$

Posons  $u = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$

Donc  $u^3 = 1 + \sqrt{2}$  est solution de (E')

Posons de plus  $v = -\frac{1}{\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}}$

Donc, on aura bien  $\begin{cases} (u^3)^2 - 2u^3 - 1 = 0 \\ v = -\frac{1}{u} \end{cases}$

Alors l'équivalence établie à la question 3 prouve que

les réels  $u$  et  $v$  satisfaisant le système  $\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ uv = -1 \end{cases}$

Et d'après l'implication de la question ②

On en déduit que  $(u+v)$  est solution de (E)

Et puisque l'équation (E) admet une unique

solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$

Alors  $\alpha = (u+v)$

$$\text{D'où } \alpha = \sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}}$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ  
وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا  
رَبَّيْنِي صَغِيرًا

### EXERCICE 34

1. Montrer que la fonction  $u: x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 2}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$

2. En déduire que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x + 2} - 2}{x+1}; & x \neq -1 \\ f(-1) = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

est continue sur  $\mathbb{R}$ .

### CORRECTION

1. Déterminons  $D_f$

$$x \in D_u \iff x^2 - x + 2 \geq 0$$

Considérons le trinôme  $x^2 - x + 2$

Son discriminant est:  $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7$

Et comme  $\Delta < 0$

Le trinôme  $x^2 - x + 2$  n'admet aucune racine réelle, et est du signe de  $a$  sur  $\mathbb{R}$  (ici  $a=1$ )

Par conséquent:  $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 - x + 2 > 0$

Donc:  $x \in D_u \iff x \in \mathbb{R}$

D'où:  $D_f = \mathbb{R}$

👉 La continuité de  $u$  sur  $\mathbb{R}$

On  $\alpha: x \mapsto x^2 - x + 2$  est continue sur  $\mathbb{R}$  *polynôme*

Et  $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 - x + 2 \geq 0$

D'où:  $u: x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$

2. La continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$\sqrt{u(x)} \xrightarrow{\quad} u(x) \geq 0$$

$\Delta < 0$		
$x$	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2+bx+c$	signe de $a$	

Si  $u$  est une fonction continue sur l'intervalle  $I$   
Et  $(\forall x \in I); u(x) \geq 0$   
Alors:  $x \mapsto \sqrt{u(x)}$   
est continue sur  $I$



On a :  $x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$

(D'après le résultat de la question précédente)

Donc :  $x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 2}$  est continue sur les intervalles

$]-\infty; -1[$  et  $]-1; +\infty[$

Et on a :  $x \mapsto -2$  est continue sur  $]-\infty; -1[$  et  $]-1; +\infty[$

(Car elle est sur  $\mathbb{R}$ )

Donc :  $x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 2} - 2$  est continue sur  $]-\infty; -1[$  et  $]-1; +\infty[$

(Somme de deux fonctions continues)

Et puisque :  $x \mapsto x+1$  est continue sur  $]-\infty; -1[$  et  $]-1; +\infty[$

Et :  $\forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[ ; x+1 \neq 0$

Alors :  $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 - x + 2} - 2}{x+1}$  est continue sur  $]-\infty; -1[$  et  $]-1; +\infty[$

 Continuité de  $f$  en  $x_0 = -1$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 2} - 2}{x+1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 2} - 2)(\sqrt{x^2 - x + 2} + 2)}{(x+1)(\sqrt{x^2 - x + 2} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 2}^2 - 2^2}{(x+1)(\sqrt{x^2 - x + 2} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 2 - 4}{(x+1)(\sqrt{x^2 - x + 2} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{(x+1)(\sqrt{x^2 - x + 2} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(\sqrt{x^2 - x + 2} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - x + 2} + 2} \\
 &= -\frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions continues sur l'intervalle  $I$

avec  $(\forall x \in I); v(x) \neq 0$

Alors la fonction  $x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$  est continue sur  $I$ .



$\frac{0}{0}$  et la racine carrée, on pense à multiplier par le conjugué.

Puisque  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$

Alors  $f$  est continue en  $x_0 = -1$

Finalement  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

### EXERCICE 35

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$   
par:  $f(x) = \frac{1 - \sqrt{x}^3 + \sqrt{x}}{x-1}$

1. Vérifier que:  $(\forall x \in ]1; +\infty[); f(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$

2. Montrer que l'équation  $\frac{1}{x-1} = \sqrt{x}$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]1; 2[$

3. Montrer que:  $\alpha^2(\alpha - 2) = 1 - \alpha$

### CORRECTION

1. Vérifions que:  $(\forall x \in ]1; +\infty[); f(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$

Soit  $x \in ]1; +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{On a : } -\sqrt{x} + \frac{1}{x-1} &= \frac{-\sqrt{x}(x-1)+1}{x-1} \\ &= \frac{-x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 1}{x-1} \\ &= \frac{-\sqrt{x}^2\sqrt{x} + \sqrt{x} + 1}{x-1} \\ &= \frac{1 - \sqrt{x}^3 + \sqrt{x}}{x-1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ x &= \sqrt{x}^2 \end{aligned}$$

D'où:  $(\forall x \in ]1; +\infty[); f(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$

2. Montrons que l'équation  $\frac{1}{x-1} = \sqrt{x}$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]1; 2[$

$$\begin{aligned} \text{On a } \frac{1}{x-1} = \sqrt{x} &\iff -\sqrt{x} + \frac{1}{x-1} = 0 \\ &\iff f(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc, il suffit de montrer l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]1; 2[$



## L'unicité

Étudions la monotonie de  $f$  sur  $]1;2]$

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $]1;2]$  tels que  $x < y$

$$x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y} \text{ et } x-1 < y-1$$

$$\Rightarrow -\sqrt{x} > -\sqrt{y} \text{ et } \frac{1}{x-1} > \frac{1}{y-1}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{x} + \frac{1}{x-1} > -\sqrt{y} + \frac{1}{y-1}$$

$$\Rightarrow f(x) > f(y)$$

Donc  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]1;2]$

La continuité de  $f$  sur  $]1;2]$

On a :  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur l'intervalle  $]1;2]$

Donc :  $x \mapsto -\sqrt{x}$  est continue sur l'intervalle  $]1;2]$

Et on a :  $x \mapsto \frac{1}{x-1}$  est continue sur l'intervalle  $]1;2]$

Donc  $f : x \mapsto -\sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$  est continue sur l'intervalle  $]1;2]$

(Somme de deux fonctions continues)

$$\begin{aligned} \text{Et on a } f(]1;2]) &= [f(2); \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)[ \\ &= [1-\sqrt{2}; +\infty[ \end{aligned}$$

Et puisque  $0 \in [1-\sqrt{2}; +\infty[$

Alors l'équation  $f(x)=0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]1;2[$

Et par suite l'équation

$\frac{1}{x-1} = \sqrt{x}$  admet une solution

unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]1;2[$

3. Montrons que :  $\alpha^2(\alpha-2)=1-\alpha$

On a  $\alpha$  est la solution de l'équation  $\frac{1}{x-1} = \sqrt{x}$

Donc  $\frac{1}{\alpha-1} = \sqrt{\alpha}$

$f$  est strictement décroissante sur  $I$  si et seulement si  $(\forall (x,y) \in I^2);$   
 $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

$$\begin{aligned} f(2) &= -\sqrt{2} + \frac{1}{2-1} = 1-\sqrt{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} -\sqrt{x} + \frac{1}{x-1} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur  $I$ , alors :  
 $(\forall y \in f(I)) (\exists ! x \in I); f(x) = y$

Donc

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x-1} = \sqrt{x} &\iff \sqrt{x}(x-1) = 1 \\
 &\iff (\sqrt{x}(x-1))^2 = 1^2 \\
 &\iff \sqrt{x}^2 \cdot (x-1)^2 = 1 \\
 &\iff x(x^2 - 2x + 1) = 1 \\
 &\iff x^3 - 2x^2 + x = 1 \\
 &\iff x^3 - 2x^2 = 1 - x \\
 &\iff x^2(x-2) = 1 - x
 \end{aligned}$$

D'où :  $x^2(x-2) = 1 - x$

### EXERCICE 36

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x + 7}$

1.  $\alpha$  Vérifier que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = (x-1)^3 + 8$

6. En déduire que :  $\mathcal{D}_f = [-1; +\infty[$

2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathcal{D}_f$

4. Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathcal{D}_f$

5.  $\alpha$  Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.

6. Déterminer  $f^{-1}(x)$ , pour tout  $x \in J$ .

### CORRECTION

1.  $\alpha$  Vérifions que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = (x-1)^3 + 8$

Soit  $x \in \mathbb{R}$

On a

$$\begin{aligned}
 (x-1)^3 + 8 &= x^3 - 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 - 1^3 + 8 \\
 &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 8 \\
 &= x^3 - 3x^2 + 3x + 7
 \end{aligned}$$

D'où :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = (x-1)^3 + 8$

6. Déduisons que :  $\mathcal{D}_f = [-1; +\infty[$

$$\begin{aligned}
 (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
 &= a^3 - 3ab(a-b) - b^3
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 x \in D_f &\iff x^3 - 3x^2 + 3x + 7 \geq 0 \\
 &\iff (x-1)^3 + 8 \geq 0 \\
 &\iff (x-1)^3 \geq -8 \\
 &\iff x-1 \geq -\sqrt[3]{8} \\
 &\iff x-1 \geq -2 \\
 &\iff x \geq -2+1 \\
 &\iff x \geq -1
 \end{aligned}$$

D'où :  $D_f = [-1; +\infty[$

2. Calculons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{(x-1)^3 + 8} = +\infty$$

Car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^3 + 8 = +\infty$

3. La continuité de  $f$  sur  $D_f$

On a  $x \mapsto (x-1)^3 + 8$  est continue sur  $D_f$  *polynôme*

Et :  $(\forall x \in \mathbb{R}); (x-1)^3 + 8 \geq 0$

Donc :  $f: x \mapsto \sqrt[3]{(x-1)^3 + 8}$  est continue sur  $D_f$

4. La monotonie de  $f$  sur  $D_f$

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $]0; +\infty[$  tels que  $x < y$

$$x < y \Rightarrow x-1 < y-1$$

$$\Rightarrow (x-1)^3 < (y-1)^3$$

$$\Rightarrow (x-1)^3 + 8 < (y-1)^3 + 8$$

$$\Rightarrow f(x) < f(y)$$

Donc :  $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

D'où  $f$  est continue et strictement croissante sur  $D_f$

5. On a  $f$  est continue sur  $D_f$  et  $f$  est strictement croissante sur  $D_f$



$$\sqrt[n]{u(x)} \xrightarrow{\text{dashed arrow}} u(x) \geq 0$$

Soit  $b \geq 0$

$$a^3 \geq b \Rightarrow a \geq \sqrt[3]{b}$$

$$a^3 \geq -b \Rightarrow a \geq -\sqrt[3]{b}$$

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty$

Alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$

Si  $u$  est une fonction

continue sur l'intervalle  $I$

Et  $(\forall x \in I); u(x) \geq 0$

Alors :  $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$  est continue sur  $I$

$$x < y \Rightarrow x^3 < y^3$$

$f$  est strictement croissante sur  $I$  si et seulement si  $(\forall (x; y) \in I^2);$

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Si  $g$  est une fonction

continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$

Alors,  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  $g(I)$

Donc  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  tel que :

$$\begin{aligned} J &= f([-1; +\infty[) \\ &= [f(-1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[ \\ &= [0; +\infty[ \end{aligned}$$

Ex Déterminons  $f^{-1}(x)$

Soit  $x \in J$ , on cherche  $y \in I$  tel que  $f(y) = x$

$$\begin{aligned} f(y) = x &\iff \sqrt[3]{(y-1)^3 + 8} = x \quad x \geq 0 \\ &\iff (y-1)^3 = x - 8 \end{aligned}$$

**1<sup>er</sup> Cas** : Si  $x \in [8; +\infty[$

$$\begin{aligned} f(y) = x &\iff \sqrt[3]{(y-1)^3 + 8} = x \\ &\iff (y-1)^3 = x - 8 \\ &\iff y - 1 = \sqrt[3]{x - 8} \\ &\iff y = 1 + \sqrt[3]{x - 8} \end{aligned}$$

Donc

$$\forall x \in [8; +\infty[; f^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x - 8}$$

**2<sup>ème</sup> Cas** : Si  $x \in [0; 8[$

$$\begin{aligned} f(y) = x &\iff \sqrt[3]{(y-1)^3 + 8} = x \\ &\iff (y-1)^3 = x - 8 \\ &\iff (1-y)^3 = 8 - x \\ &\iff 1 - y = \sqrt[3]{8 - x} \\ &\iff y = 1 - \sqrt[3]{8 - x} \end{aligned}$$

Donc

$$\forall x \in [0; 8[; f^{-1}(x) = 1 - \sqrt[3]{8 - x}$$

**Conclusion**

$$\begin{cases} \forall x \in [0; 8[; f^{-1}(x) = 1 - \sqrt[3]{8 - x} \\ \forall x \in [8; +\infty[; f^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x - 8} \end{cases}$$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement croissante

Pour déterminer  $f^{-1}(x)$   
On prend  $x \in J$  et on cherche l'unique  $y \in I$  tel que  $f(y) = x$

Ici, on a  $x \in [0; +\infty[$

Donc  $x$  peut être positif ou négatif

Si  $x - 8 < 0$ , on a pas le droit d'écrire  $\sqrt[3]{x}$

Donc, il faut discuter les deux cas suivants:

$$x \in [0; 8[$$

$$x \in [8; +\infty[$$

$$\begin{aligned} (y-1)^3 &= x - 8 \\ -(y-1)^3 &= -(x - 8) \\ (-(y-1))^3 &= 8 - x \\ (1-y)^3 &= 8 - x \end{aligned}$$



## EXERCICE 37

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[0;1]$   
 tel que  $f([0;1]) \subset ]1;2[$   
 Montrer que :  $(\exists c \in ]0;1[; f(c) = \frac{1}{c})$

## CORRECTION

Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0;1]$

par :  $g(x) = xf(x) - 1$

On a  $f$  est continue sur  $[0;1]$

(D'après l'énoncé)

Et :  $x \mapsto x$  est continue sur  $[0;1]$   
 polynôme

Donc :  $x \mapsto xf(x)$  est continue sur  $[0;1]$

Produit de deux fonctions continues

Et :  $x \mapsto -1$  est continue sur  $[0;1]$   
 fonction constante

Donc :  $g : x \mapsto xf(x) - 1$  est continue sur l'intervalle  $[0;1]$

Et  $g(0) = 0 \cdot f(0) - 1 = -1$

$g(1) = 1 \cdot f(1) - 1 = f(1) - 1$

Et on a  $f([0;1]) \subset ]1;2[$

Donc  $(\forall x \in [0;1]); 1 < f(x) < 2$

Donc  $(\forall x \in [0;1]); f(x) - 1 > 0$

Donc  $f(1) - 1 > 0$

On aura  $\begin{cases} g(0) < 0 \\ g(1) > 0 \end{cases}$

Donc  $g(0) \cdot g(1) < 0$

Et d'après T.V.I il existe un réel  $c \in ]0;1[$  tel que  $g(c) = 0$

On a  $g(c) = 0 \iff cf(c) - 1 = 0 \iff cf(c) = 1 \iff f(c) = \frac{1}{c} \quad c \neq 0$

Pour déterminer la nouvelle fonction à considérer, on remplace  $c$  par  $x$ , on aura

$$f(x) = \frac{1}{x} \iff xf(x) = 1 \\ \iff xf(x) - 1 = 0$$

Donc  $g(x) = xf(x) - 1$

$$f(x) = \frac{1}{x} \iff g(x) = 0$$

On ne peut pas considérer la fonction  $g(x) = f(x) - \frac{1}{x}$

Car l'image de 0

(ou  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ ) n'existe pas

Si  $f$  est continue sur un intervalle fermé

$[a; b]$  avec  $f(a) \cdot f(b) < 0$

Alors, il existe  $\alpha \in ]a; b[$  tel que  $f(\alpha) = 0$

D'où  $(\exists c \in ]0;1[); f(c) = \frac{1}{c}$

### EXERCICE 38

Déterminer les deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  pour que la fonction

$$f \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par } \begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + \alpha x + 1}{x-1}, x > 1 \\ f(x) = \frac{3x + \beta}{2}, x \leq 1 \end{cases}$$

### CORRECTION

Sur l'intervalle  $]1; +\infty[$

On a :  $\forall x \in ]1; +\infty[; x-1 \neq 0$

Donc  $f_1: x \mapsto \frac{3x^2 + \alpha x + 1}{x-1}$  est continue sur  $]1; +\infty[$

Sur l'intervalle  $]-\infty; 1[$

On a  $f_2: x \mapsto \frac{3x + \beta}{2}$

On a  $f_2$  est continue sur  $]-\infty; 1[$  Polynôme

Donc  $f$  est continue sur les deux intervalles  $]1; +\infty[$  et  $]-\infty; 1[$

Pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}$ , il suffit qu'elle soit continue en  $x_0 = 1$

Calculons  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 + \alpha x + 1}{x-1}$$

Si  $\alpha \neq -4$   $4 + \alpha \neq 0$

Alors  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$

Donc  $f$  ne sera pas continue en  $x_0 = 1$

Si  $\alpha = -4$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(3x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{Si } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Alors  $f$  est continue en  $x$ .

Si on remplace  $x$  par 1 on aura :  $\frac{4 + \alpha}{0}$

Deux cas à discuter :

?  $4 + \alpha \neq 0$ ; dans ce cas on aura :  $\frac{A}{0} = \infty$

?  $4 + \alpha = 0$ ; dans ce cas on aura :  $\frac{0}{0}$

Si  $x_0 \neq 0$  est une racine de  $ax^2 + bx + c$ , alors

$$ax^2 + bx + c = (x - x_0) \left( ax - \frac{c}{x_0} \right)$$





Calculons  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x+b}{2} = \frac{3+b}{2}$$



Calculons  $f(1)$

$$f(1) = \frac{3 \cdot 1 + b}{2} = \frac{3+b}{2}$$



$f$  est continue en  $x_0 = 1$

Corsque :  $a = -4$  et  $\frac{3+b}{2} = 2$

Donc  $a = -4$  et  $b = 1$

Il suffit de remplacer.

Pour calculer  $f(1)$ , on doit remplacer  $x$  par 1 dans la deuxième expression de  $f$  où on a  $x \leq 1$

$$\frac{3+b}{2} = 2 \Leftrightarrow 3+b = 4 \Leftrightarrow b = 1$$

### EXERCICE 39

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $\sqrt{2x+1} - 1 < \sqrt{x+2}$

### CORRECTION

Déterminons d'abord  $D_f$  l'ensemble de définition de l'inéquation

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2x+1 \geq 0 \text{ et } x+2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq -1 \text{ et } x \geq -2$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2} \text{ et } x \geq -2$$

$$\text{Donc } D_f = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

Soit  $S$  l'ensemble de solution de l'inéquation

Soit  $x \in D_f$

$$\sqrt{2x+1} - 1 < \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} < \sqrt{x+2} + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}^2 < (\sqrt{x+2} + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 < \sqrt{x+2}^2 + 2\sqrt{x+2} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 < x+2 + 2\sqrt{x+2} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 - x - 2 - 1 < 2\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow x-2 < 2\sqrt{x+2}$$

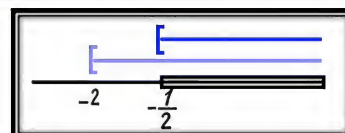
Si :  $x < 2$

On l'inégalité :  $x-2 < 2\sqrt{x+2}$  est vraie

Donc  $(]-\infty; 2[ \cap D_f) \subset S$

Donc  $\left[-\frac{1}{2}; 2\right[ \subset S$  ①

$$\sqrt{u(x)} \text{ --- } u(x) \geq 0$$



Remarquons que  $\sqrt{2x+1} - 1$  peut être positif ou négatif.

Mais  $\sqrt{2x+1}$  et  $\sqrt{x+2} + 1$  sont tous positifs.

Si  $x \geq 2$   $x-2 \geq 0$

On a

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1}-1 < \sqrt{x+2} &\Leftrightarrow x-2 < 2\sqrt{x+2} \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 < (2\sqrt{x+2})^2 \\ &\Leftrightarrow x^2-4x+4 < 4(x+2) \\ &\Leftrightarrow x^2-4x+4 < 4x+8 \\ &\Leftrightarrow x^2-8x-4 < 0 \end{aligned}$$

Donc, résoudre l'inéquation  $\sqrt{2x+1}-1 < \sqrt{x+2}$  revient à résoudre  $x^2-8x-4 < 0$  sur l'intervalle  $[2; +\infty[$

Soit l'inéquation  $x^2-8x-4 < 0$

Son discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac = 80$

Puisque  $\Delta > 0$

Alors le trinôme  $x^2-8x-4$  admet deux racines distinctes

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+\sqrt{80}}{2} = \frac{8+4\sqrt{5}}{2} = 4+2\sqrt{5} \\ \text{et } x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-\sqrt{80}}{2} = \frac{8-4\sqrt{5}}{2} = 4-2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$4-2\sqrt{5}$	$2$	$4+2\sqrt{5}$	$+\infty$
$x^2-8x-4$	+	○	-	○	+

On cherche à résoudre une inéquation, il faut donc dresser le tableau de signe

On résout l'inéquation  $x^2-8x-4 < 0$  sur l'intervalle  $[2; +\infty[$

Donc, on aura:  $[2; 4+2\sqrt{5}[ \subset S$

D'où, d'après ① et ②:  $S = \left[-\frac{1}{2}; 2\right] \cup [2; 4+2\sqrt{5}[ = \left[-\frac{1}{2}; 4+2\sqrt{5}[$

### EXERCICE 40

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $x+2 > \sqrt[3]{x^2+8}$

### CORRECTION

Déterminons l'ensemble de définition de l'inéquation

On a:  $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2+8 > 0$

Donc  $D_I = \mathbb{R}$



Résolvons l'inéquation:

☞ Si  $x \leq -2$

On aura  $x+2 \leq 0$  et  $\sqrt[3]{x^2+8} > 0$

Donc l'inéquation n'admet aucune solution

☞ Si  $x > -2$

On aura  $x+2 > 0$  et  $\sqrt[3]{x^2+8} > 0$

Donc

$$\begin{aligned} x+2 > \sqrt[3]{x^2+8} &\Leftrightarrow (x+2)^3 > \sqrt[3]{x^2+8}^3 \\ &\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 > x^2 + 8 \\ &\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^2 - 8 > 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 + 5x^2 + 12x > 0 \\ &\Leftrightarrow x(x^2 + 5x + 12) > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3ab(a+b) + b^3 \end{aligned}$$

$$a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$$

Étudions le signe de  $x(x^2+5x+12) > 0$

Soit le trinôme  $x^2+5x+12$

Son discriminant  $\Delta = 5^2 - 4ac = -23$

Puisque  $\Delta$

Alors le trinôme  $x^2+5x+12$  ne possède aucune racine

Et son signe dépend du signe de  $a=1$

Puisque  $a=1 > 0$

Alors  $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2+5x+12 > 0$

Donc  $x(x^2+5x+12) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Donc  $x > 0$

Donc  $x > 0$  et  $x > -2$

D'où  $S = ]0; +\infty[$

On résout l'inéquation dans le cas  $x > -2$

$(x \in ]-2; +\infty[)$

On a trouvé  $x > 0$

$(x \in ]0; +\infty[)$

Donc  $x \in ]-2; +\infty[ \cap ]0; +\infty[$

Donc  $x \in ]0; +\infty[$

### EXERCICE 41

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation: (E):  $\sqrt[3]{(1+x)^2} + 4\sqrt[3]{(1-x)^2} = 4\sqrt[3]{1-x^2}$

(Poser  $y = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$ )

CORRECTION

Déterminons d'abord  $\mathcal{D}_E$ ; l'ensemble de définition de l'équation  
On a  $(\forall x \in \mathbb{R}); (1+x)^2 \geq 0$  et  $(1-x)^2 \geq 0$

$$\text{Donc } x \in \mathcal{D}_E \iff 1-x^2 \geq 0 \\ \iff (1-x)(1+x) \geq 0$$

Étudions le signe de  $(1-x)(1+x)$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$1-x$	+	+	○	-
$1+x$	-	○	+	+
$(1-x)(1+x)$	-	○	+	-

$$\text{Donc : } x \in \mathcal{D}_E \iff x \in [-1; 1]$$

$$\text{D'où : } \mathcal{D}_E = [-1; 1]$$

On a  $1$  et  $-1$  ne sont pas des solutions de l'équation (E)

$$\text{Donc : } (\forall x \in \mathcal{D}_E); 1-x^2 > 0$$

$$(E) \iff \sqrt[3]{(1+x)^2} + 4\sqrt[3]{(1-x)^2} = 4\sqrt[3]{1-x^2}$$

$$\iff \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}}{\sqrt[3]{1-x^2}} + 4 \frac{\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{1-x^2}} = 4$$

$$\iff \sqrt[3]{\frac{(1+x)^2}{1-x^2}} + 4\sqrt[3]{\frac{(1-x)^2}{1-x^2}} = 4$$

$$\iff \sqrt[3]{\frac{(1+x)^2}{(1+x)(1-x)}} + 4\sqrt[3]{\frac{(1-x)^2}{(1+x)(1-x)}} = 4$$

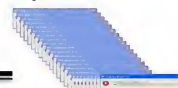
$$\iff \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} + 4\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = 4$$

$$\iff \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{4}{\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}} = 4$$

$$\text{Posons : } y = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$$

L'équation (E) devient  $y + \frac{4}{y} = 4$  et  $y \neq 0$

ERREUR  
404



$$\text{Si } (1-x)(1+x) \geq 0$$

$$\text{Alors } 1-x \geq 0 \text{ ou } 1+x \geq 0$$



Ça va très bien !



Pour étudier le signe  
de  $(1-x)(1+x)$   
ça sera mieux de  
dresser le tableau  
de signe



Donc  $\frac{y^2+4y}{y} = 4$  et  $y \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{y^2+4y}{y} = 4 \text{ et } y \neq 0 &\Leftrightarrow y^2+4=4y \text{ et } y \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (y-2)^2=0 \text{ et } y \neq 0 \\ &\Leftrightarrow y-2=0 \text{ et } y \neq 0 \\ &\Leftrightarrow y=2 \text{ et } y \neq 0 \end{aligned}$$

Donc  $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} = 2 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} = 8$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 1+x = 8(1-x) \\ &\Leftrightarrow 1+x = 8-8x \\ &\Leftrightarrow 9x = 7 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

Et puisque  $\frac{7}{9} \in ]-1;1[$

Alors  $S = \left\{ \frac{7}{9} \right\}$

### EXERCICE 42

Soit  $f$  la fonction définie par:  $f(x) = \frac{2x^7+3}{x^7-2}$

1. a. Déterminer  $D_f$  le domaine de définition de  $f$ .

b. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$

2. a. Calculer  $f'(x)$ , pour tout  $x \in D_f$

b. En déduire la monotonie de  $f$

3. Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I = ]-\infty; \sqrt[7]{2}[$

a. Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.

b. Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$

### CORRECTION

1. a. Déterminons  $D_f$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^7 - 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^7 \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x \neq \sqrt[7]{2}$$

b~ Calculons les limites  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ;  $\lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt[7]{2} \\ x < \sqrt[7]{2}}} f(x)$   
et  $\lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt[7]{2} \\ x > \sqrt[7]{2}}} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^7+3}{x^7-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^7}{x^7} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^7+3}{x^7-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^7}{x^7} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt[7]{2} \\ x < \sqrt[7]{2}}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt[7]{2} \\ x < \sqrt[7]{2}}} \frac{2x^7+3}{x^7-2} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt[7]{2} \\ x > \sqrt[7]{2}}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt[7]{2} \\ x > \sqrt[7]{2}}} \frac{2x^7+3}{x^7-2} = +\infty$$

2~

a~ Calculons  $f'(x)$ , pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$   
Soit  $x \in \mathcal{D}_f$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{2x^7+3}{x^7-2} \right)' \\ &= \frac{(2x^7+3)' \cdot (x^7-2) - (x^7-2)' \cdot (2x^7+3)}{(x^7-2)^2} \\ &= \frac{14x^6(x^7-2) - 7x^6(2x^7+3)}{(x^7-2)^2} \\ &= \frac{14x^{13} - 28x^6 - 14x^{13} - 21x^6}{(x^7-2)^2} \\ &= \frac{-49x^6}{(x^7-2)^2} \end{aligned}$$

D'où  $(\forall x \in \mathcal{D}_f); f'(x) = \frac{-49x^6}{(x^7-2)^2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} = \infty \quad n > m \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_m x^{m-n}} = 0 \quad m > n \\ &= \frac{a_n}{b_m} \quad m = n \end{aligned}$$

Si on remplace  $x$  par  $\sqrt[7]{2}^-$ ,  
on trouve  $\frac{7}{0^-} = -\infty$

Si on remplace  $x$  par  $\sqrt[7]{2}^+$ ,  
on trouve  $\frac{7}{0^+} = +\infty$

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$a' = 0 \quad (ax)' = a$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(a x^n)' = a n x^{n-1}$$



6. La monotonie de  $f$  sur  $D_f$

$$\text{On a } (\forall x \in D_f); f'(x) = \frac{-49x^6}{(x^7-2)^2}$$

Et puisque  $(\forall x \in D_f); (x^7-2)^2 > 0$  et  $-49x^6 \leq 0$

Alors  $(\forall x \in D_f); f'(x) \leq 0$

D'où  $f$  est strictement décroissante sur les deux intervalles  $]-\infty; \sqrt[7]{2}[$  et  $]\sqrt[7]{2}; +\infty[$

3. a. Montrons que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$

On a  $g$  est une fonction continue sur  $I$

Et  $g$  est strictement décroissante sur  $I$

Donc  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un

intervalle  $J$  tel que :  $J = g(I)$

$$J = g(]-\infty; \sqrt[7]{2}[)$$

$$= \left[ \lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt[7]{2} \\ x < \sqrt[7]{2}}} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$$

$$= ]-\infty; 2[$$

6. Déterminons  $g^{-1}(x)$

Soit  $x \in J$ , on cherche  $y \in I$  tel que  $g(y) = x$

$$g(y) = x \iff \frac{2y^7+3}{y^7-2} = x$$

$$\iff 2y^7+3 = x(y^7-2)$$

$$\iff 2y^7+3 = xy^7-2x$$

$$\iff 2y^7 - xy^7 = -2x-3$$

$$\iff y^7(2-x) = -2x-3$$

Si  $g$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  Alors,  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  $g(I)$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement décroissante

Pour déterminer  $g^{-1}(x)$

On prend  $x \in J$  et on cherche l'unique  $y \in I$  tel que  $g(y) = x$

$$\Leftrightarrow y^7 = \frac{-2x-3}{2-x}$$

$$\Leftrightarrow y^7 = \frac{2x+3}{x-2}$$

☞ Si  $x \leq -\frac{3}{2}$

$$g(y)=x \Leftrightarrow y^7 = \frac{2x+3}{x-2} \quad \frac{2x+3}{x-2} > 0$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt[7]{\frac{2x+3}{x-2}}$$

$$\text{Donc } \forall x \in ]-\infty; -\frac{3}{2}]; g^{-1}(x) = \sqrt[7]{\frac{2x+3}{x-2}}$$

☞ Si  $x > -\frac{3}{2}$

$$g(y)=x \Leftrightarrow y^7 = \frac{2x+3}{x-2} \quad \frac{2x+3}{x-2} < 0$$

$$\Leftrightarrow -y^7 = -\frac{2x+3}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow (-y)^7 = -\frac{2x+3}{x-2} \quad -\frac{2x+3}{x-2} > 0$$

$$\Leftrightarrow -y = \sqrt[7]{-\frac{2x+3}{x-2}} = \sqrt[7]{\frac{2x+3}{2-x}}$$

$$\Leftrightarrow y = -\sqrt[7]{\frac{2x+3}{2-x}}$$

$$\text{Donc } \forall x \in ]-\frac{3}{2}; +\infty[; g^{-1}(x) = -\sqrt[7]{\frac{2x+3}{2-x}}$$

Conclusion

$$\begin{cases} g^{-1}(x) = \sqrt[7]{\frac{2x+3}{x-2}} & ; x \in ]-\infty; -\frac{3}{2}] \\ g^{-1}(x) = -\sqrt[7]{\frac{2x+3}{2-x}} & ; x \in ]-\frac{3}{2}; +\infty[ \end{cases}$$

### EXERCICE 43



Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} ; x > 1 \\ f(x) = (1+k)^2 ; x \leq 1 \end{cases}$$

Déterminer les valeurs du réel  $k$  pour que la fonction  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}$ .

### CORRECTION

👉 La continuité de  $f$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$

On a :  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur l'intervalle  $[0; +\infty[$

Donc en particulier sur l'intervalle  $]1; +\infty[$

Et :  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $]1; +\infty[$

D'où  $f : x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{x}$  est continue sur  $]1; +\infty[$

👉 La continuité de  $f$  sur l'intervalle  $]-\infty; 1[$

On a  $f : x \mapsto (1+k)^2$  est continue sur  $]-\infty; 1[$  *polynôme*

Il en résulte que  $f$  est continue sur  $]-\infty; 1[$  et  $]1; +\infty[$

👉 La continuité de  $f$  en  $x_0 = 1$

pour que  $f$  soit continue en  $x_0 = 1$ , il faut que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = f(1)$$

$$\text{On a } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt{x} + \frac{1}{x} = 2$$

$$\text{Et } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (1+k)^2 = (1+k)^2$$

$$\text{Si } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Alors  $f$  est continue en  $x_0$ .

Il suffit de remplacer.

Donc, pour que  $f$  soit continue en  $x_0 = 1$ , il faut que :

$$(1+k)^2 = 2$$

$$(1+k)^2 = 2 \iff 1+k = \sqrt{2} \text{ ou } 1+k = -\sqrt{2}$$

$$\iff k = \sqrt{2} - 1 \text{ ou } k = -\sqrt{2} - 1$$

D'où  $f$  est continue en  $x_0 = 1$ , et donc sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $k = \sqrt{2} - 1$  ou  $k = -\sqrt{2} - 1$

## EXERCICE 44

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^2 - x \sin x - \cos x$$

1. Calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
2. a. Calculer  $f'(x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$   
 b. En déduire la monotonie de  $f$   
 c. Dresser le tableau de variations de  $f$
3. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\alpha < 0$  et  $\beta > 0$
4. Étudier le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$

## CORRECTION

1. Calcul des limites

Soit  $x \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} \text{On a } f(x) &= x^2 - x \sin x - \cos x \\ &= x^2 \left( 1 - \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} \right) \end{aligned}$$

Ici, le dominant ~ bien sûr ~ c'est  $x^2$ .

Donc la limite de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$  vaut  $+\infty$

Mais il faut le montrer.

On sait que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*); |\sin x| \leq 1$  et  $|\cos x| \leq 1$

$$(\forall t \in \mathbb{R}); |\cos t| \leq 1$$

Donc :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*); \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|}$  et  $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$

$$(\forall t \in \mathbb{R}); |\sin t| \leq 1$$

Donc :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*); \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|}$  et  $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$

Et puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Alors :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0$

On aura donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 1 - \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} \right) = +\infty$

De même, on a :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*); \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|}$  et  $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$

Et puisque :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$



Alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0$

On aura donc :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left( 1 - \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} \right)$   
 $= +\infty$

2. a. Calculons  $f'(x)$

Soit  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 - x \sin x - \cos x)' \\ &= 2x - (x' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)') - (\cos x)' \\ &= 2x - (\sin x + x \cos x) - (-\sin x) \\ &= 2x - \sin x - x \cos x + \sin x \\ &= 2x - x \cos x \\ &= x(2 - \cos x) \end{aligned}$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

D'où  $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = x(2 - \cos x)$

$$(\forall t \in \mathbb{R}); -1 \leq \cos t \leq 1$$

b. La monotonie de  $f$

Étudions le signe de  $f'(x)$


On a :  $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = x(2 - \cos x)$

On sait que :  $(\forall x \in \mathbb{R}); -1 \leq \cos x \leq 1$

Donc :  $(\forall x \in \mathbb{R}); 1 \leq 2 - \cos x \leq 3$

Donc :  $(\forall x \in \mathbb{R}); 2 - \cos x \geq 0$

Donc le signe de  $f'(x)$  est le signe de  $x$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$x$	-		+
<b>REGLE</b>	Signe de -a		Signe de a

D'où :  $\begin{cases} \forall x \in ]-\infty; 0]; f'(x) \leq 0 \\ \forall x \in [0; +\infty[; f'(x) \geq 0 \end{cases}$

Et par suite,  $f$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; 0]$

et strictement croissante sur  $[0; +\infty[$

c. Le tableau de variations de  $f$ .

D'après les résultats des questions précédentes, on aura:

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-1$	$+\infty$

3. Montrons que l'équation  $f(x)=0$  admet deux solutions réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\alpha < 0$  et  $\beta > 0$

☞ Sur l'intervalle  $]-\infty; 0]$

On a  $f$  est continue sur l'intervalle  $]-\infty; 0]$

Comme étant produit et somme de fonctions continues

Et  $f$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; 0]$

$$\text{Et on a: } f(]-\infty; 0]) = [f(0); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[ \\ = [-1; +\infty[$$

Et puisque  $0 \in [-1; +\infty[$

Alors l'équation  $f(x)=0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $]-\infty; 0]$

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur  $I$ , alors:

$$(\forall y \in f(I)) (\exists ! x \in I); f(x) = y$$

☞ Sur l'intervalle  $[0; +\infty[$

On a  $f$  est continue sur l'intervalle  $[0; +\infty[$

Comme étant produit et somme de fonctions continues

Et  $f$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$

$$\text{Et on a: } f([0; +\infty[) = [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[ \\ = [-1; +\infty[$$

Et puisque  $0 \in [-1; +\infty[$

Alors l'équation  $f(x)=0$  admet une unique solution  $\beta$  sur  $[0; +\infty[$

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur  $I$ , alors:

$$(\forall y \in f(I)) (\exists ! x \in I); f(x) = y$$

4. Le signe de  $f(x)$



☞ Sur l'intervalle  $]-\infty; \alpha]$

On a  $f$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; \alpha]$

Soit  $x \in ]-\infty; \alpha]$

$$x \in ]-\infty; \alpha] \Rightarrow x \leq \alpha$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(\alpha)$$

$$f(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \geq 0$$

Donc  $\forall x \in ]-\infty; \alpha]; f(x) \geq 0$

☞ Sur l'intervalle  $[\alpha; 0]$

On a  $f$  est strictement décroissante sur  $[\alpha; 0]$

Soit  $x \in [\alpha; 0]$

$$x \in [\alpha; 0] \Rightarrow x \geq \alpha$$

$$\Rightarrow f(x) \leq f(\alpha)$$

$$\Rightarrow f(x) \leq 0$$

Donc  $\forall x \in [\alpha; 0]; f(x) \leq 0$

☞ Sur l'intervalle  $[0; \beta]$

On a  $f$  est strictement croissante sur  $[0; \beta]$

Soit  $x \in [0; \beta]$

$$x \in [0; \beta] \Rightarrow x \leq \beta$$

$$\Rightarrow f(x) \leq f(\beta)$$

$$\Rightarrow f(x) \leq 0$$

Donc  $\forall x \in [0; \beta]; f(x) \leq 0$

☞ Sur l'intervalle  $[\beta; +\infty[$

On a  $f$  est strictement croissante sur  $[\beta; +\infty[$

Soit  $x \in [\beta; +\infty[$

$$x \in [\beta; +\infty[ \Rightarrow x \geq \beta$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(\beta)$$

$$\Rightarrow f(x) \geq 0$$

Donc  $\forall x \in [\beta; +\infty[; f(x) \geq 0$

$f$  est strictement  
décroissante sur  $I$   
si et seulement si  
( $\forall (x; y) \in I^2$ );  
 $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

$f$  est strictement  
décroissante sur  $I$   
si et seulement si  
( $\forall (x; y) \in I^2$ );  
 $x \geq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

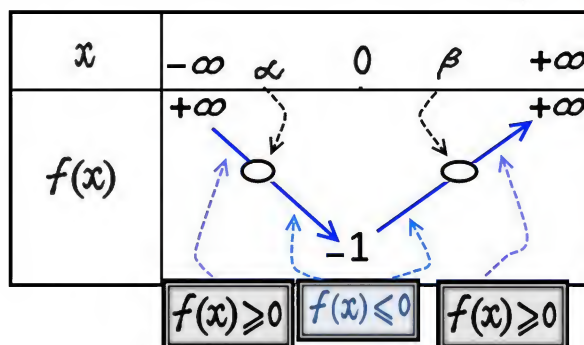
$f$  est strictement  
croissante sur  $I$   
si et seulement si  
( $\forall (x; y) \in I^2$ );  
 $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

$f$  est strictement  
croissante sur  $I$   
si et seulement si  
( $\forall (x; y) \in I^2$ );  
 $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

## Conclusion

$$\forall x \in ]-\infty; \alpha] \cup [\beta; +\infty[; f(x) \geq 0$$

$$\forall x \in [\alpha; \beta]; f(x) \leq 0$$



## EXERCICE 45

Soit  $f$  la fonction définie par:  $f(x) = \frac{\sin(2x)}{3x}$

1~ Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de  $f$ .

2~ Montrer que  $f$  est continue sur  $D_f$ .

3~ Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

4~ Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

## CORRECTION

1~ Déterminons  $D_f$

$$x \in D_f \iff 3x \neq 0$$

$$\iff x \neq 0$$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^* = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$$

2~ La continuité de  $f$  sur  $D_f$

On a  $u: x \mapsto 2x$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Donc  $u$  est continue sur  $D_f$

Et on a  $v: u(D_f) \subset \mathbb{R}$

Alors  $v \circ u$  est continue sur  $D_f$

Comme étant composée de deux fonctions.

Et comme  $x \mapsto 3x$  est continue sur  $D_f$

Et  $(\forall x \in D_f); 3x \neq 0$

Alors  $f: x \mapsto \frac{\sin(2x)}{3x}$  est continue sur  $D_f$

3~ Calculons  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

On sait que:  $(\forall x \in \mathbb{R}^*); |\sin(2x)| \leq 1$

$$\frac{u(x)}{v(x)} \xrightarrow{v(x) \neq 0}$$

Si

$u$  est continue sur  $I$

$v$  est continue sur  $J$

$u(I) \subset J$

Alors

$v \circ u$  est continue sur  $I$

$$(\forall t \in \mathbb{R}); |\sin t| \leq 1$$



$$\text{Donc : } (\forall x \in \mathbb{R}^*); \frac{|\sin(2x)|}{|3x|} \leq \frac{1}{|3x|}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in \mathbb{R}^*); \left| \frac{\sin(2x)}{3x} \right| \leq \frac{1}{|3x|}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in \mathbb{R}^*); |f(x)| \leq \frac{1}{|3x|}$$

$$\text{Et puisque : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|3x|} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|3x|} = 0$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$4 \sim \text{Calculons } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \times \frac{2x}{3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \times \frac{2}{3} \\ &= 1 \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

#### Remarque

On a  $0 \notin D_f$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$

On dit que  $f$  est prolongeable par continuité en  $x_0 = 0$

Et on définit une nouvelle fonction  $\tilde{f}$  définie par :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x); x \neq 0 \\ \tilde{f}(0) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

#### EXERCICE 46

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{1 - \sin x}{\sin(\cos x)}$

1. Déterminer  $D_f$  le domaine de définition de  $f$

2. Étudier la continuité de  $f$  sur  $D_f$

3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$

## CORRECTION

1. Déterminons  $D_f$ .

$$\begin{aligned} x \in D_f &\iff \sin(\cos x) \neq 0 \\ &\iff \cos x \neq k\pi / k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \cos x \neq 0 \\ &\iff x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. La continuité de  $f$  sur  $D_f$

On a:  $x \mapsto \sin x$  est continue sur  $\mathbb{R}$   
Donc elle est sur  $D_f$

Et:  $x \mapsto -\sin x$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Et comme  $x \mapsto 1$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Alors  $x \mapsto 1 - \sin x$  est continue sur  $D_f$  ①

Et on a:  $u: x \mapsto \cos x$  est continue sur  $D_f$

Et:  $(\forall x \in D_f); \cos x \in \mathbb{R}$  (i.e.  $u(D_f) \subset \mathbb{R}$ )

Et  $v: x \mapsto \sin x$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Donc  $v \circ u$  est continue sur  $D_f$  ②

Comme étant composée de deux fonctions.

Et puisque  $(\forall x \in D_f); \sin(\cos x) \neq 0$  ③

Alors, d'après ①, ② et ③

$$\text{on aura } f: x \mapsto \frac{1 - \sin x}{\sin(\cos x)}$$

est continue sur  $D_f$

3. Calculons  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\sin(\cos x)}$$

On pose  $t = x - \frac{\pi}{2}$

Donc  $x = t + \frac{\pi}{2}$

Si  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$

Alors  $t \rightarrow 0$

Les deux fonctions  $\sin$  et  $\cos$  sont définies sur  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sin x = 0 &\iff x = k\pi / k \in \mathbb{Z}. \\ \cos x = 0 &\iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\cos x = k\pi \iff k = 0$$

$$\text{car } (\forall x \in \mathbb{R}); -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Donc la seule valeur de  $k$  est  $k=0$

Si

☒  $u$  est continue sur  $I$

☒  $v$  est continue sur  $J$

☒  $u(I) \subset J$



Alors

$v \circ u$  est continue sur  $I$

Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions continues sur l'intervalle  $I$

avec  $(\forall x \in I); v(x) \neq 0$

Alors la fonction  $x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$  est continue sur  $I$ .



$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\sin(\cos x)} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sin(t + \frac{\pi}{2})}{\sin(\cos(t + \frac{\pi}{2}))} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{\sin(-\sin t)} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos t}{t^2} \times t^2}{\frac{\sin(-\sin t)}{(-\sin t)} \times (-\sin t)} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos t}{t^2} \times \frac{t^2}{-\sin t}}{\frac{\sin(-\sin t)}{(-\sin t)}} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos t}{t^2} \times \frac{t^2}{-\sin t} \times t}{\frac{\sin(-\sin t)}{(-\sin t)}} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos t}{t^2} \times \frac{1}{-\sin t} \times t}{\frac{\sin(-\sin t)}{(-\sin t)}}
\end{aligned}$$



Pour calculer une limite de type  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(u(x))}{v(x)}$

Avec  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = 0$

On doit suivre les étapes suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(u(x))}{v(x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(u(x))}{u(x)} \times \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\text{On a: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(u(x))}{u(x)} = 1$$

il reste à déterminer

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$$

On a  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$ ;  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} t = 0$

Reste à calculer  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(-\sin t)}{(-\sin t)}$

Posons  $u = -\sin t$

Si  $t \rightarrow 0$

Alors  $u \rightarrow 0$

Donc, on aura  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(-\sin t)}{(-\sin t)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$

Donc  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos t}{t^2} \times \frac{1}{-\sin t} \times t}{\frac{\sin(-\sin t)}{(-\sin t)}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} \times \frac{1}{-1} \times 0 = 0$

D'où  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 0$

$$\sin(t + \frac{\pi}{2}) = \cos t$$

$$\cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\sin t$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

## EXERCICE 47

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}[$  par :

$$f(x) = \tan(x) + x - 1$$

1. Calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x)$

2. Montrer que  $f$  est continue sur l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}[$

3. a. Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$

b. En déduire la monotonie de  $f$

c. Déterminer  $f\left([0; \frac{\pi}{2}[ \right)$

4. a. Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer

b. En déduire que l'équation  $\tan x = 1 - x$  admet une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}[$

## CORRECTION

1. Calculons  $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} (\tan(x) + x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x) = +\infty$$



2. La continuité de  $f$  sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$

On a :  $x \mapsto \tan x$  est continue sur l'intervalle  $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

En particulier sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$

Et :  $x \mapsto x - 1$  est continue sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$  *polynôme*

Donc :  $f : x \mapsto \tan x + x - 1$  est continue sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$

*Comme étant somme de deux fonctions continues*

3. a. Calculons  $f'(x)$  pour tout  $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$

Soit  $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$



$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (\tan(x) + x - 1)' \\
 &= \tan^2(x) + 1 + 1 \\
 &= \tan^2(x) + 2
 \end{aligned}$$

D'où  $f'(x) = \tan^2(x) + 2$  pour tout  $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$

b. La monotonie de  $f$  sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$

Étudions le signe de  $f'(x)$  sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$

On a :  $f'(x) = \tan^2(x) + 2$

Et puisque :  $(\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[); \tan^2(x) \geq 0$  et  $2 > 0$

Alors  $(\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[); f'(x) > 0$

D'où  $f$  est strictement croissante sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$

c. Déterminons  $f([0; \frac{\pi}{2}[$ )

On a  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$

Donc  $f([0; \frac{\pi}{2}[) = [f(0); \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)[$   
 $= [-1; +\infty[$   $\tan(0) = 0$

$f$  est strictement croissante sur  $I$  si et seulement si  $(\forall (x, y) \in I^2);$   
 $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

4. a. a.

On a  $f$  est continue sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$  et strictement croissante sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$

Donc  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  tel que :

$$J = f([0; \frac{\pi}{2}[) = [-1; +\infty[$$

b. Déduisons que l'équation  $\tan x = 1 - x$  admet une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}[$

D'après la question précédente, on déduit que :

$$(\forall y \in J)(\exists ! \alpha \in [0; \frac{\pi}{2}[); f(\alpha) = y$$

Si  $g$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  Alors,  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  $g(I)$

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur  $I$ , alors :

$$(\forall y \in f(I))(\exists ! x \in I); f(x) = y$$

On prend  $y=0$

Donc  $(\exists! \alpha \in [0; \frac{\pi}{2}[); f(\alpha)=0$

Autrement dit l'équation  $f(x)=0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}[$

D'où l'équation  $\tan x = 1-x$  admet une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}[$

### EXERCICE 48

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par:  $f(x) = 2x - 3\sin x$

1.  $\alpha$  Montrer que:  $(\forall x \in \mathbb{R}); 2x - 3 \leq f(x) \leq 2x + 3$

$\hookrightarrow$  En déduire les limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2.  $\alpha$  Soit  $g$  la fonction définie par:

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x}{f(x)}; x \neq 0 \\ g(0) = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$\alpha$  Montrer que  $g$  est continue en  $x_0=0$

$\hookrightarrow$  Montrer que pour tout  $x \in ]\frac{3}{2}; +\infty[; \frac{x}{2x+3} \leq g(x) \leq \frac{x}{2x-3}$

$\hookrightarrow$  En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

### CORRECTION

1.  $\alpha$  Soit  $x \in \mathbb{R}$

On sait que:  $(\forall x \in \mathbb{R}); -1 \leq \sin x \leq 1$

Donc:  $(\forall x \in \mathbb{R}); -3 \leq 3\sin x \leq 3$

Donc:  $(\forall x \in \mathbb{R}); 2x - 3 \leq 2x - 3\sin x \leq 2x + 3$

D'où:  $(\forall x \in \mathbb{R}); 2x - 3 \leq f(x) \leq 2x + 3$

$\hookrightarrow$  Calculons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et

On a  $(\forall x \in \mathbb{R}); 2x - 3 \leq f(x) \leq 2x + 3$

et puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 3 = +\infty$

Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  tels que

$$(\forall x \in I); u(x) \leq v(x)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -\infty$$



Et on a:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x+3 = -\infty$

Alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2. Montrons que  $g$  est continue en  $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x+3\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x\left(2+\frac{3\sin x}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2+3\frac{\sin x}{x}} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$f$  est continue en  $x_0$   
si et seulement si  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Et puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$

Alors  $g$  est continue en  $x_0 = 0$

En Montrons que:  $\forall x \in ]\frac{3}{2}; +\infty[; \frac{x}{2x+3} \leq g(x) \leq \frac{x}{2x-3}$

D'après le résultat de la question 1. a.

On a:  $(\forall x \in \mathbb{R}); 2x-3 \leq f(x) \leq 2x+3$

En particulier

$\forall x \in ]\frac{3}{2}; +\infty[; 2x-3 \leq f(x) \leq 2x+3$

Soit  $x \in ]\frac{3}{2}; +\infty[$

On a:  $\forall x \in ]\frac{3}{2}; +\infty[; 2x-3 \leq f(x) \leq 2x+3$

Donc:  $\forall x \in ]\frac{3}{2}; +\infty[; \frac{1}{2x+3} \leq \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{2x-3}$

Donc:  $\forall x \in ]\frac{3}{2}; +\infty[; \frac{x}{2x+3} \leq \frac{x}{f(x)} \leq \frac{x}{2x-3}$

D'où:  $\forall x \in ]\frac{3}{2}; +\infty[; \frac{x}{2x+3} \leq g(x) \leq \frac{x}{2x-3}$

c. Calculons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

On a:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

كلمات خفيفتان على اللسان،  
ثقلتان في ميزان:  
سُبْحَانَ اللَّهِ وَبِحَمْدِهِ  
سُبْحَانَ اللَّهِ الْعَظِيمِ

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Donc, d'après le théorème gendarme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{2}$$

### EXERCICE 49

Le tableau de variations suivant est le tableau de variations d'une fonction  $f$

On pose  $f(x) = \frac{ax^2+1}{x^2+b}$

① ~ En utilisant le tableau de variations de  $f$  étudier le signe de  $f(x)$

② ~ En utilisant le tableau de variations de  $f$  déterminer  $a$  et  $b$ .

③ ~ Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $[0;1[$   
 a. Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer  
 b. Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	$\nearrow$ $1$	$\nearrow$ $+\infty$	$\nwarrow$ $-1$	$\searrow$ $+\infty$	$\searrow$ $1$

### CORRECTION

① ~ Le signe de  $f(x)$

☛ Sur l'intervalle  $]-\infty; -1[$

On a  $f$  est *minorée* par le réel  $1$  sur  $]-\infty; -1[$

Donc  $\forall x \in ]-\infty; -1[; f(x) > 1$

Et puisque  $1 > 0$

Alors  $\boxed{\forall x \in ]-\infty; -1[; f(x) > 0}$

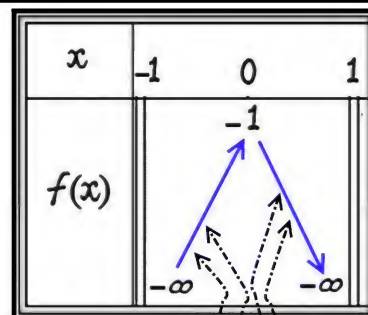
$x$	$-\infty$	$-1$
$f(x)$	$\nearrow$ $1$	$\nearrow$ $+\infty$

$f(x) \geq 0$

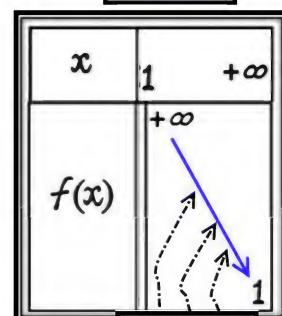


Sur l'intervalle  $]-1;1[$   
 On a  $-1$  est une valeur maximale de  $f$  sur  $]-1;1[$   
 Donc  $\forall x \in ]-1;1[ ; f(x) \leq -1$   
 Et puisque  $-1 < 0$   
 Alors  $\forall x \in ]-1;1[ ; f(x) < 0$

$-1$  est une valeur maximale de  $f$  car  $f(0) = -1$



$$f(x) \leq 0$$



$$f(x) \geq 0$$

Conclusion

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[ ; f(x) > 0 \\ \forall x \in ]-1; 1[ ; f(x) < 0 \end{cases}$$

2. Déterminons  $a$  et  $b$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + 1}{x^2 + b} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{x^2} = a$$

Et d'après le tableau de variations de  $f$   
 on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

$$\text{Donc } \boxed{a = 1}$$

$$\text{On a } f(0) = \frac{0^2 + 1}{0^2 + b} = \frac{1}{b}$$

Et d'après le tableau de variations de  $f$

$$\text{On a } f(0) = -1$$

$$\text{Donc } \frac{1}{b} = -1$$

$$\text{Donc } \boxed{b = -1}$$

$$\text{D'où } \boxed{f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}, \text{ pour tout } x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

3) On a  $g$  est une fonction continue et strictement décroissante sur l'intervalle  $[0;1[$ .  
Donc  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  tel que  $J = g([0;1[)$

$$= ]\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x); g(0)] \\ = ]-\infty; -1]$$

Ex. Déterminons  $g^{-1}(x)$

Soit  $x \in J$ , on cherche  $y \in I$  tel que  $g(y) = x$

$$\begin{aligned} g(y) = x &\iff \frac{y^2 + 1}{y^2 - 1} = x \\ &\iff y^2 + 1 = x(y^2 - 1) \\ &\iff y^2 + 1 = x y^2 - x \\ &\iff y^2 - x y^2 = -x - 1 \\ &\iff y^2(1 - x) = -x - 1 \\ &\iff y^2 = \frac{-x - 1}{1 - x} \\ &\iff y^2 = \frac{x + 1}{x - 1} \\ &\iff y = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}} \text{ ou } y = -\sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}} \end{aligned}$$

Or  $y \in [0;1[$

$$\text{Donc: } y = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}$$

$$\text{D'où } (\forall x \in J); g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}$$

Si  $g$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ .  
Alors,  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  $g(I)$

Il suffit d'appliquer l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement décroissante

Pour déterminer  $g^{-1}(x)$   
On prend  $x \in J$  et on cherche l'unique  $y \in I$  tel que  $g(y) = x$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ  
وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا  
رَبَّيْنِي صَغِيرًا



## EXERCICE 50

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

1. a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b. Montrer que pour tout  $x \geq 1$ ;

$$\text{on a : } f(x) \geq \frac{2x-1}{3}$$

c. En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. Étudier la continuité de  $f$  en 0 et en 1

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - 2x ; x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x^2+x-2}{3(x-1)} ; x \in ]0;1[ \\ f(x) = \frac{2x+\cos \pi x}{2+\cos \pi x} ; x \geq 1 \end{cases}$$

## CORRECTION

1. a. Calculons  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - 2x) = +\infty$$

Il suffit de remplacer.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+x+1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x = +\infty \end{cases}$$

b. Montrons que :  $\forall x \in ]1; +\infty[ ; f(x) \geq \frac{2x-1}{3}$

Soit  $x \in ]1; +\infty[$

On sait que :  $-1 \leq \cos \pi x \leq 1$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \pi x \leq 1 \iff 2-1 \leq 2+\cos \pi x \leq 2+1 \text{ et } 2x-1 \leq 2x+\cos \pi x \leq 2x+1$$

$$\iff 1 \leq 2+\cos \pi x \leq 3 \text{ et } 2x-1 \leq 2x+\cos \pi x \leq 2x+1$$

$$\iff \frac{1}{2+\cos \pi x} \geq \frac{1}{3} \text{ et } 2x+\cos \pi x \geq 2x-1$$

$$\iff \frac{2x+\cos \pi x}{2+\cos \pi x} \geq \frac{2x-1}{3}$$

$$\iff f(x) \geq \frac{2x-1}{3}$$

$$\text{D'où : } \forall x \in ]1; +\infty[ ; f(x) \geq \frac{2x-1}{3}$$

c. Dédisons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

D'après la question précédente

$$: \forall x \in ]1; +\infty[ ; f(x) \geq \frac{2x-1}{3}$$

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  tels que

$$(\forall x \in I) ; u(x) \leq v(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -\infty$$

Et puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{3} = +\infty$

Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2. La continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x - 2}{3(x-1)} = \frac{2}{3}$$

$$f(0) = \sqrt{0^2 + 0 + 1} - 2 \times 0 = 1$$

Et puisque  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$

Alors  $f$  est continue en 0 à gauche

Or  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq f(0)$

Alors  $f$  n'est pas en 0 à droite

Conclusion

$f$  n'est pas continue en 0.

3. La continuité de  $f$  en 1

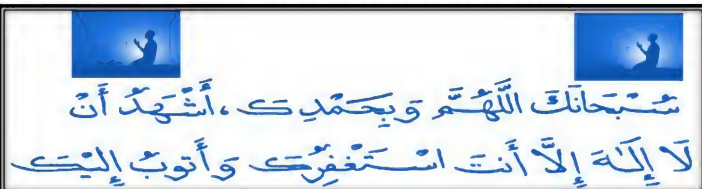
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{3(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+2)}{3(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+2)}{3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + \cos \pi x}{2 + \cos \pi x} = 1$$

$$f(1) = 1$$

Si  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$

Alors  $f$  est continue en  $x_0$ .





Et puisque  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

Alors  $f$  est continue en 1

### EXERCICE 51

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies par leurs courbes ci-dessous, représentées dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
La fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $]-\infty; -1]$   
et la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]2; 4]$

1. Donner graphiquement  $f(-1)$ ;  $f(-2)$ ;  $g(3)$  et  $g(4)$

2. Déterminer  $g \circ f([-\infty; -1])$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f(x)$

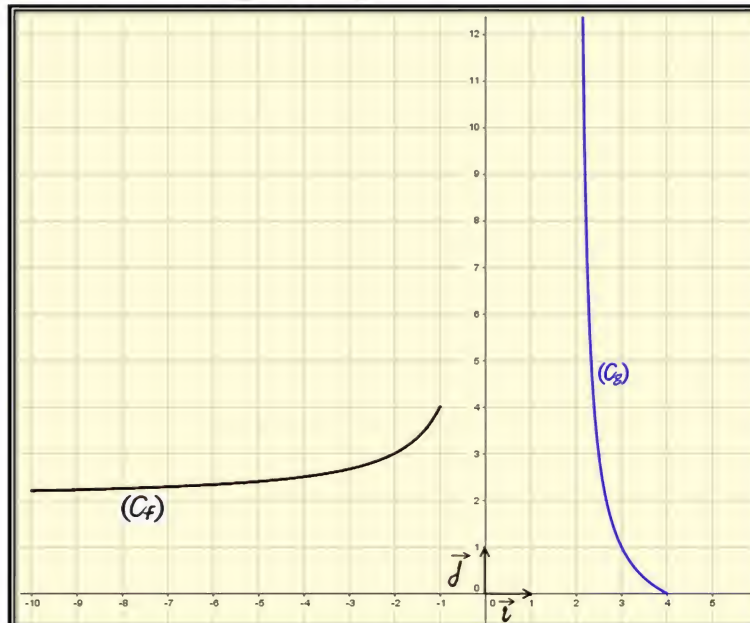
3. a. Montrer que:  $(\forall x \in ]-\infty; -1]); f(x) \in ]2; 4]$

b. Montrer que pour tous réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b \leq -1$

on a:  $g \circ f(a) > g \circ f(b)$

c. En déduire la monotonie de  $g \circ f$  sur  $]-\infty; -1]$

4. Montrer que l'équation  $g \circ f(x) = \frac{1}{2}$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]-2; -1[$



### CORRECTION

① ~ Graphiquement, on a :  $f(-1)=4$  ,  $f(-2)=3$  ,  $g(3)=1$  ,  $g(4)=0$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=2$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)=+\infty$

② ~ Déterminons :  $g \circ f([-2;-1])$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f(x)$

$$\begin{aligned} \text{👉 } g \circ f([-2;-1]) &= g(f([-2;-1])) \\ &= g([f(-2); f(-1)]) \\ &= g([3;4]) \\ &= [g(4); g(3)] \\ &= [0;1] \end{aligned}$$

*f est continue  
et strictement  
croissante sur  
[-2;-1]*

*g est continue  
et strictement  
décroissante  
sur [3;4]*

$$\text{👉 } \lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(f(x))$$

On pose  $t = f(x)$

Si  $x \rightarrow -\infty$

Alors  $t \rightarrow 2^+$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=2 \text{ et } f(2)>0$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} g(f(x)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^+} g(t) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

③ ~ a ~ Montrons que :  $(\forall x \in ]-\infty; -1]); f(x) \in ]2; 4]$

$$\begin{aligned} f(]-\infty; -1]) &= ]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(-1)] \\ &= ]2; 4] \end{aligned}$$

Et par suite

$$(\forall x \in ]-\infty; -1]); f(x) \in ]2; 4]$$

b ~ Montrons que pour tout réels  
a et b tel que  $a < b \leq -1$

$$\text{on a : } g \circ f(a) > g \circ f(b)$$

Soient a et b deux réels tel que  $a < b \leq -1$

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

$$\Rightarrow g(f(a)) > g(f(b))$$

*Il suffit d'appliquer  
l'image d'un  
intervalle par  
une fonction  
continue et strictement  
décroissante*

*f est croissante*

*g est décroissante*



$$\Rightarrow g \circ f(a) > g \circ f(b)$$

c. La monotonie de  $g \circ f$  sur  $]-\infty; -1]$

D'après le résultat de la question précédente, on a pour tout réels  $a$  et  $b$  tel que  $a < b \leq -1$

$$a < b \Rightarrow g \circ f(a) > g \circ f(b)$$

Donc  $g \circ f$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; -1]$

④. Montrons que l'équation  $g \circ f(x) = \frac{1}{2}$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]-2; -1[$

☞ La continuité de  $g \circ f$  sur  $[-2; -1]$

☞ On a  $f$  est continue sur  $[-2; -1]$

☞  $f([-2; -1]) = [3; 4]$

☞  $g$  est continue sur  $[3; 4]$

Donc  $g \circ f$  est continue sur  $[-2; -1]$

☞ Calculons  $g \circ f(-2)$  et  $g \circ f(-1)$

$$\text{☞ } g \circ f(-2) = g(f(-2)) = g(3) = 1$$

$$\text{☞ } g \circ f(-1) = g(f(-1)) = g(4) = 0$$

Si

☞  $u$  est continue sur  $I$

☞  $v$  est continue sur  $J$

☞  $u(I) \subset J$

Alors

☞  $v \circ u$  est continue sur  $I$

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur  $I$ , alors:

$$(\forall y \in f(I)) (\exists ! x \in I); f(x) = y$$

### Conclusion

$$\text{On a } \begin{cases} \text{☞ } g \circ f \text{ est continue sur } [-2; -1] \\ \text{☞ } g \circ f(-1) < \frac{1}{2} < g \circ f(-2) \\ \text{☞ } g \circ f \text{ est strictement décroissante sur } [-2; -1] \end{cases}$$

Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation  $g \circ f(x) = \frac{1}{2}$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]-2; -1[$

Exercices non résolus



**EXERCICE 1**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}, & x \neq 3 \\ f(3) = 2 \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est continue en  $x_0 = 3$

**EXERCICE 2**

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3x - 1} - 3}{x - 2}, & x \neq 2 \\ f(2) = \frac{7}{6} \end{cases}$$

- ① ~ Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de  $f$
- ② ~ Étudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 2$
- ③ ~ Étudier la continuité de  $f$  sur  $D_f$ .

**EXERCICE 3**

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x-1}, & x \neq 1 \\ f(1) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

- ① ~ Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de  $f$
- ② ~ Étudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 1$
- ③ ~ Étudier la continuité de  $f$  sur  $D_f$ .

**EXERCICE 4**

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{2-x}}, & x \neq 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

- ① ~ Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de  $f$
- ② ~ Étudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 2$  à gauche

## EXERCICE 5

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$$

1. Déterminer les deux limites :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
2. a. Calculer  $f'(x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  
b. Étudier le signe de  $f'(x)$   
c. Dresser le tableau de variations de  $f$
3. a. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement trois solutions  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  tels que :  
 $\alpha < -3$ ;  $-3 < \beta < -1$  et  $\gamma > -1$   
b. Étudier le signe de  $f(x)$
4. a. Montrer que l'équation  $f(x) = 4$  admet une unique solution  $\lambda$  sur  $\mathbb{R}$   
b. Comparer  $f(x)$  et 4, suivant les valeurs de  $x$

## EXERCICE 6

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 4$$

1. Déterminer les solutions de l'équation  $f(x) = -4$
2. a. Calculer  $f'(x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$   
b. Étudier le signe de  $f'(x)$ , puis dresser le tableau de variations de  $f$
3. Donner, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = -12$
4. Existe-t-il un réel  $y$  tel que l'équation  $f(x) = y$  n'ait aucune solution ?

## EXERCICE 7

Soit  $P$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$$

1. Dresser le tableau de variations de  $P$
2. En déduire le nombre de racines de  $P$
3. Retrouver directement ces racines en factorisant  $P(x)$



**EXERCICE 8**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(x^2 - 3x + 2)}{x-1}, & x > 1 \\ f(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}, & x < 1 \\ f(1) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de  $f$  à droite et à gauche du point  $x_0 = 1$
2.  $f$  est-elle continue en  $x_0 = 1$  ?
3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**EXERCICE 9**

Simplifier les deux expressions suivantes :

$$A = \frac{\sqrt[5]{512} \sqrt[4]{160000}}{\sqrt[4]{64} \sqrt[3]{256} \sqrt{18}} ; B = \frac{\sqrt[3]{9} \sqrt{3} (\sqrt[3]{\sqrt{3}})^2}{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{3}}}}$$

**EXERCICE 10**

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt[3]{x+8}}{\sin x} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt[3]{5x^2 + 10x + 12}}{x^2 - 5x + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x} - 2}{x}$$

**EXERCICE 11**

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{3x^3 - 2x - 1} - \sqrt{x-1} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt[3]{x^2 - 2x}$$

**EXERCICE 12**

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2-1} - 2x; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - \sqrt[3]{1-x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x+63}-4}$$

### EXERCICE 13

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^3-1}$$

1.  $\alpha \sim$  Vérifier que :  $(\forall x \in ]1; +\infty[); f(x) = 2 + \frac{2}{x^3-1}$

$\beta \sim$  Montrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $]1; +\infty[$

2.  $\alpha \sim$  Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.

$\beta \sim$  Dresser le tableau de variations de  $f^{-1}$

$\gamma \sim$  Déterminer  $f^{-1}(x)$ , pour tout  $x \in J$ .

### EXERCICE 14

1.  $\alpha \sim$  Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les deux équations :

$$\alpha \sim \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12$$

$$\beta \sim \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$$

2.  $\alpha \sim$  Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante :

$$\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$$

### EXERCICE 15

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^5 + x^3 + x - 1$

Montrer que la courbe représentative de  $f$  coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse  $\alpha$  compris entre 0 et 1

### EXERCICE 16

Montrer que l'équation  $x = 1 - \sin x$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{6}[$



**EXERCICE 17**

Montrer que chacune des équations suivantes admet au moins une solution sur l'intervalle  $I$

①  $x^4 + 2x^3 - 5x + 1 = 0$  et  $I = ]0; 1[$

②  $2\cos x = x$  et  $I = ]0; \frac{\pi}{2}[$

③  $\sin x = \cos x$  et  $I = ]0; \frac{\pi}{2}[$

④  $x^3 - \sqrt{x} - 3x + 1 = 0$  et  $I = ]0; 1[$

**EXERCICE 18**

Soit  $f$  la fonction définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} - 3}, & x \neq 3 \\ f(3) = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est continue en  $x_0 = 3$

**EXERCICE 19**

Soit  $f$  la fonction définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x-2} & ; x \geq 3 \\ f(x) = x - 1 + \sqrt[3]{3-x} & ; x < 3 \end{cases}$$

①  $\sim$  Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de  $f$ .

②  $\sim$  Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$

③  $\sim$  Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

④  $\sim$  Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I = ]3; +\infty[$

a.  $\sim$  Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.

b.  $\sim$  Déterminer  $g^{-1}(x)$ , pour tout  $x \in J$ .

**EXERCICE 20**

Soit  $f$  la fonction définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} - 3}, & x \neq 3 \\ f(3) = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est continue en  $x_0 = 3$

**EXERCICE 21**

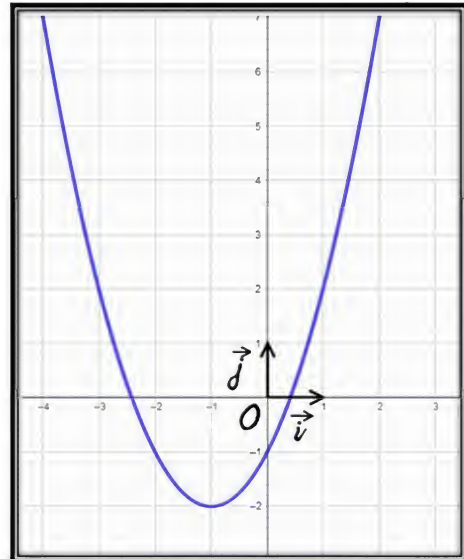
Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x}$

- 1° Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de  $f$
- 2° Montrer que  $f$  est continue sur  $D_f$
- 3° Calculer les limites suivantes :  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$
- 4° Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $]1; 2[$
- 5° Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I = ]-\infty; -1[$ 
  - a° Montrer que pour tous  $x$  et  $y$  de  $I$  :  $x < y \Rightarrow g(x) > g(y)$
  - b° Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer
  - c° Déterminer  $g^{-1}(x)$ , pour tout  $x \in J$

## EXERCICE 22

La courbe donnée ci-dessous représente une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[-4; 2]$

- 1° a° Donner le tableau de variations de  $f$   
 b° La fonction  $f$  est-elle continue sur  $[-4; 2]$
- 2° a° Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $]-1; 2[$   
 b° Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 1  
 c° Étudier le signe de  $f(x)$  sur l'intervalle  $[-1; 2]$
- 3° Montrer que l'équation  $f(x) = \frac{3}{2}$  admet une unique solution  $\beta$  sur l'intervalle  $[-1; 2]$  et que  $\beta > 1$



## EXERCICE 23

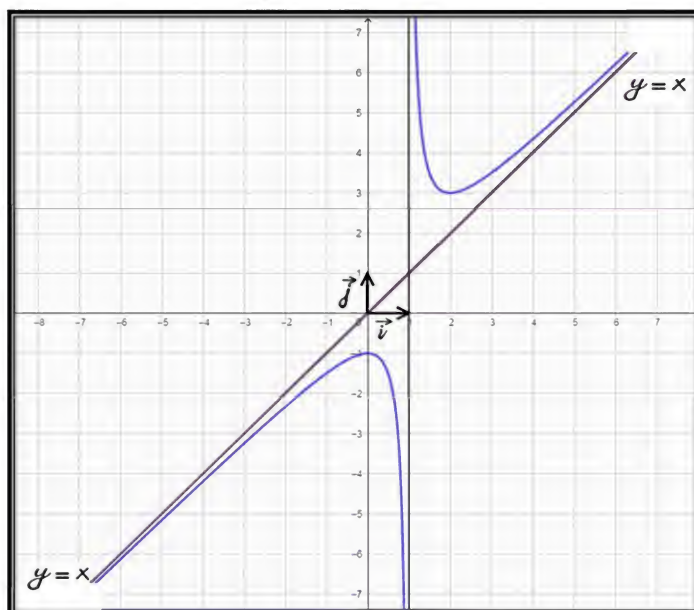


Soit  $f$  la fonction définie sur  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  par :  $f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$

- ① Déterminer les deux réels  $a$  et  $b$  tels que :  
 $(\forall x \in D); f(x) = a + \frac{b}{x-1}$
- ② Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $D$
- ③ En utilisant la forme la plus adaptée, déterminer :  
 $a \sim$  Le sens de variations de la fonction  $f$   
 $b \sim$  Le signe de  $f(x)$   
 $c \sim$  Les solutions de l'inéquation :  $f(x) \geq 3$

### EXERCICE 24

La courbe donnée ci-dessous représente une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$



- ① Calculer les limites suivantes :  
 $a \sim \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$      $b \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$   
 $c \sim \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  ;  $d \sim \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
- ② Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$
- ③ Résoudre l'équation  $f(x) = 0$
- ④ Étudier le signe de  $f(x)$ , suivant les valeurs de  $x$
- ⑤ Donner, graphiquement, le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = m$  (discuter suivant les valeurs de  $m$ )